Контрольная работа № 6.

Вариант № 6.

Задание 1. Составить формулу общего члена числового ряда:

$0+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\ldots$

Решение:

Во-первых, данный ряд не является знакочередующимся. Во-вторых,

1	2	3	4		
0	1/3	1/2	3/5		

первый член 0 следовательно его можно получить -1+1=0, второй член 1/3 =(-1+2)/3, а 3 можно представить 2+1 и т.д.

получаем, что

$$a_n = \frac{-1+n}{2+1}$$

Задание 2. Найти 5-й член числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi}{3}(2n-1)\right)$.

Решение:

$$a_5 = \sin\left(\frac{\pi}{3}(2*5-1)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}(9)\right) = \sin(3\pi) = 0.$$

Задание 3. Найти частичную сумму S_5 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{2n^2+1}$.

Решение:

$$S_5 = \frac{(-1)^{1+1}(2+1)}{2+1} + \frac{(-1)^{2+1}(2*2+1)}{2*2^2+1} + \frac{(-1)^{3+1}(2*3+1)}{2*3^2+1} + \frac{(-1)^{4+1}(2*4+1)}{2*4^2+1} + \frac{(-1)^{5+1}(2*5+1)}{2*5^2+1} = 1 - \frac{5}{9} + \frac{7}{19} - \frac{9}{33} + \frac{11}{51} = \frac{24169}{31977}.$$

Задание 4. Исследовать на сходимость числовые ряды:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3n-1}}{n+2}$. 4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5}}$. 4.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-4}{n+1}\right)^n$. 4.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n}$. 4.5. $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^n$.

4.1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3n-1}}{n+2}$$

Решение:

Проверим сначала для данного ряда выполнения необходимого условия сходимости: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n-1}}{n+2} = 0$.

Рассмотри ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$$

он расходится и $\frac{1}{n+2} < \frac{\sqrt{3n-1}}{n+2}$

следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n-1}}{n+2}$$

ряд расходиться по признаку сравнения.

4.2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5}}$$

Решение:

Данный ряд относится к типу обобщённых гармонических рядов $\frac{1}{n^p}$, причём p=1/5<1, значит, ряд расходится.

4.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-4}{n+1}\right)^n$$

Решение:

Проверим сначала для данного ряда выполнения необходимого условия сходимости:

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-4}{n+1}\right)^n = \infty \neq 0.$

Предел общего члена ряда не равен нулю, следовательно, данный ряд является расходящимся.

Согласно признаку Коши, данный ряд сходится.

4.4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$$

Решение:

Используем признак Даламбера. Найдём

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n(n+1)^2}{4^{n+1}n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n(n^2+2n+1)}{4^n 4n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2n+1)}{4n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{4n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{4} = \frac{1}{4} < 1$$

Согласно признаку Даламбера, данный ряд сходится.

4.5

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Решение:

Проверим сначала для данного ряда выполнения необходимого условия сходимости:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0.$

Предел общего члена ряда не равен нулю, следовательно, данный ряд является расходящимся.

Задание 5. Исследовать на сходимость знакопеременные ряды:

5.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n+3}}$. 5.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n^3}$.

5.1

Решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n+3}}$$

Запишем последовательность абсолютных величин членов данного ряда. Получим:$\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+$... Члены ряда убывают по абсолютной величине. Теперь найдём предел общего члена ряда, составленного из абсолютных величин. Получим: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}} = 0$. Таким образом, выполняются оба условия признака Лейбница, и данный ряд является сходящимся. Поскольку выше мы установили сходимость ряда, составленного из абсолютных величин, то данный ряд сходится абсолютно.

5.2

Решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^3}$$

Запишем последовательность абсолютных величин членов данного ряда. Получим:$\frac{1}{1}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+$... Члены ряда убывают по абсолютной величине. Теперь найдём предел общего члена ряда, составленного из абсолютных величин. Получим: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = 0$. Таким образом, выполняются оба условия признака Лейбница, и данный ряд является сходящимся. Поскольку выше мы установили сходимость ряда, составленного из абсолютных величин, то данный ряд сходится абсолютно.

Задание 6. Найти радиус, интервал и область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}$.

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n\frac{1}{n2^n}$$

Воспользуемся формулой Даламбера

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}*\frac{n2^n}{1}\right|=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)2^n2}*\frac{n2^n}{1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(n+1)2}\right|=\frac{1}{2}$$

$$R=2$$

$$\frac{|x-1|}{1}=2$$

$$-1<x<3$$

Теперь проверим сходимость ряда на концах этого интервала.

Пусть x = -1

Получаем ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1-1)^n\frac{1}{n2^n};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\frac{1}{n2^n};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n};$$

Это числовой знакочередующийся ряд, исследуем его по признаку Лейбница.

а) По первому признаку Лейбница каждый последующий член ряда по абсолютной величине должен быть меньше предыдущего, т.е. для нашего ряда это условие не выполняется

1>1/2>1/3

б) По второму признаку Лейбница предел ряда должен стремится к 0.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\right|=0$$

Второе условие Лейбница выполняется.

Ряд сходится, значит, x = -1 - точка расходимости.

При x = 3

получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3-1)^n \frac{1}{n2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

воспользуемся интегральным признаком Коши

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^{n}\frac{1}{x}dx = \lim_{n\to\infty}(\ln(x))\Big|\begin{matrix}\infty\\1\end{matrix} = = \lim_{n\to\infty}(ln*(\infty)-\ln(1)) = \infty$$

Ряд расходиться

тогда исходный степенной ряд сходиться на интервале [-13).