Математика

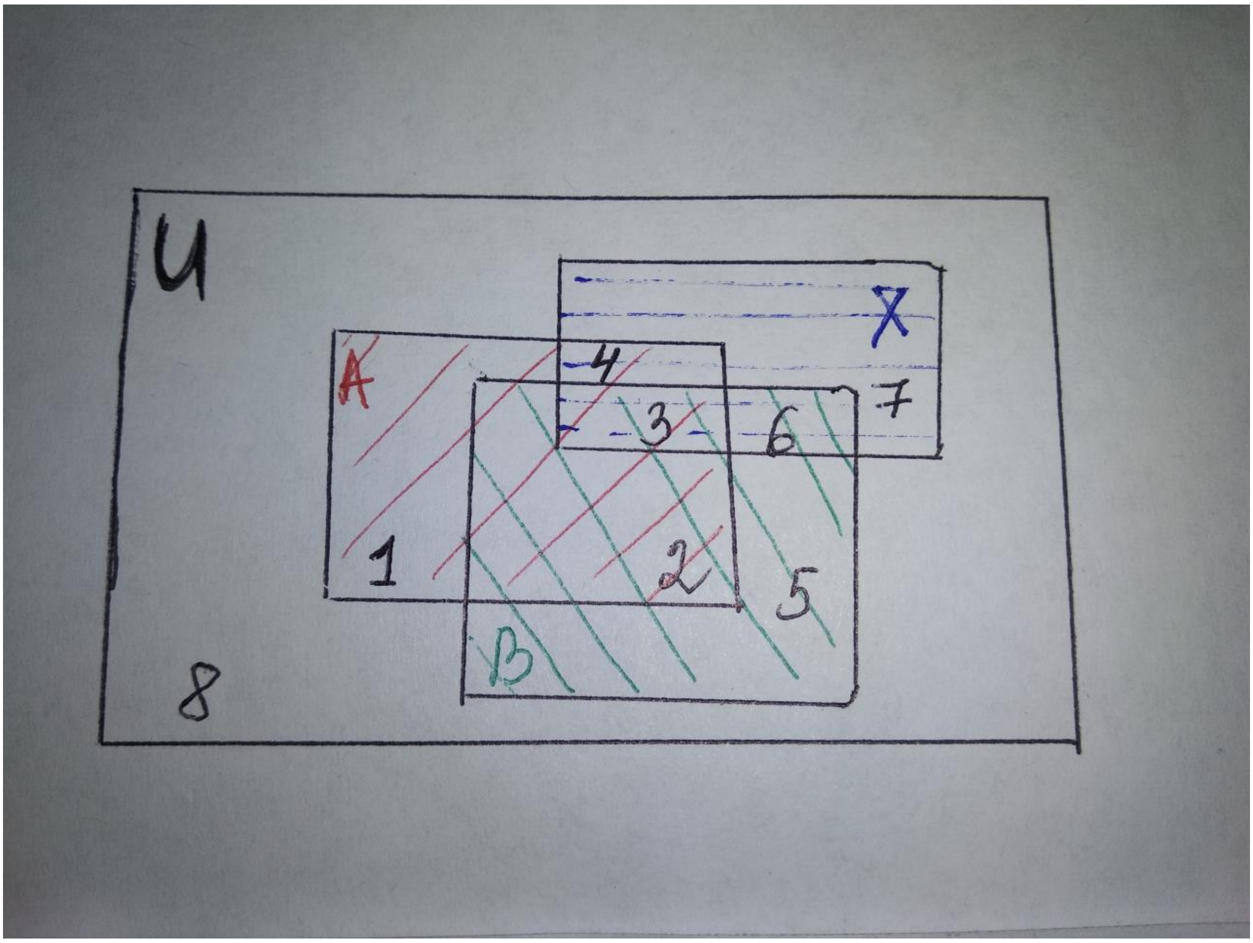
15 вариант

Задание 1.1.5

Выяснить взаимное расположение множеств D, E, F, если A, B, X – произвольные подмножества универсального множества U.

$$D = \overline{A \cup B} \cup (X \cap A); E = A \cup \bar{B}; F = ((X \cup \bar{A})\backslash B) \cup (X \cap A)$$

Решение. Изобразим множества A, B, X в виде прямоугольников, расположенных на плоскости в общем положении, и поставим в каждой области, на которые плоскость разбита прямоугольниками, по одному символу: символ 2, например, обозначает список всех элементов, попавших во множества A и B, но не попавших в X и т.д. Теперь составим множества A, B, X и универсальное множество U:



U: 1,2,3,4,5,6,7,8

A: 1,2,3,4

B: 2,3,5,6

$$X: 3,4,6,7.$$

$$A \cup B = 1,2,3,4,5,6$$

$$\overline{A \cup B} = 7,8$$

$$X \cap A = 3,4$$

$D = \overline{A \cup B} \cup (X \cap A) = 3,4,7,8$

$$\bar{B} = 1,4,7,8$$

$E = A \cup \bar{B} = 1,2,3,4,7,8;$

$$(\bar{A}) = 5,6,7,8$$

$$(X \cup \bar{A}) = 3,4,5,6,7,8$$

$$(X \cup \bar{A}) \backslash B = 4,7,8$$

$$X \cap A = 3,4$$

$F = \left((X \cup \bar{A}) \backslash B\right) \cup (X \cap A) = 3,4,7,8.$

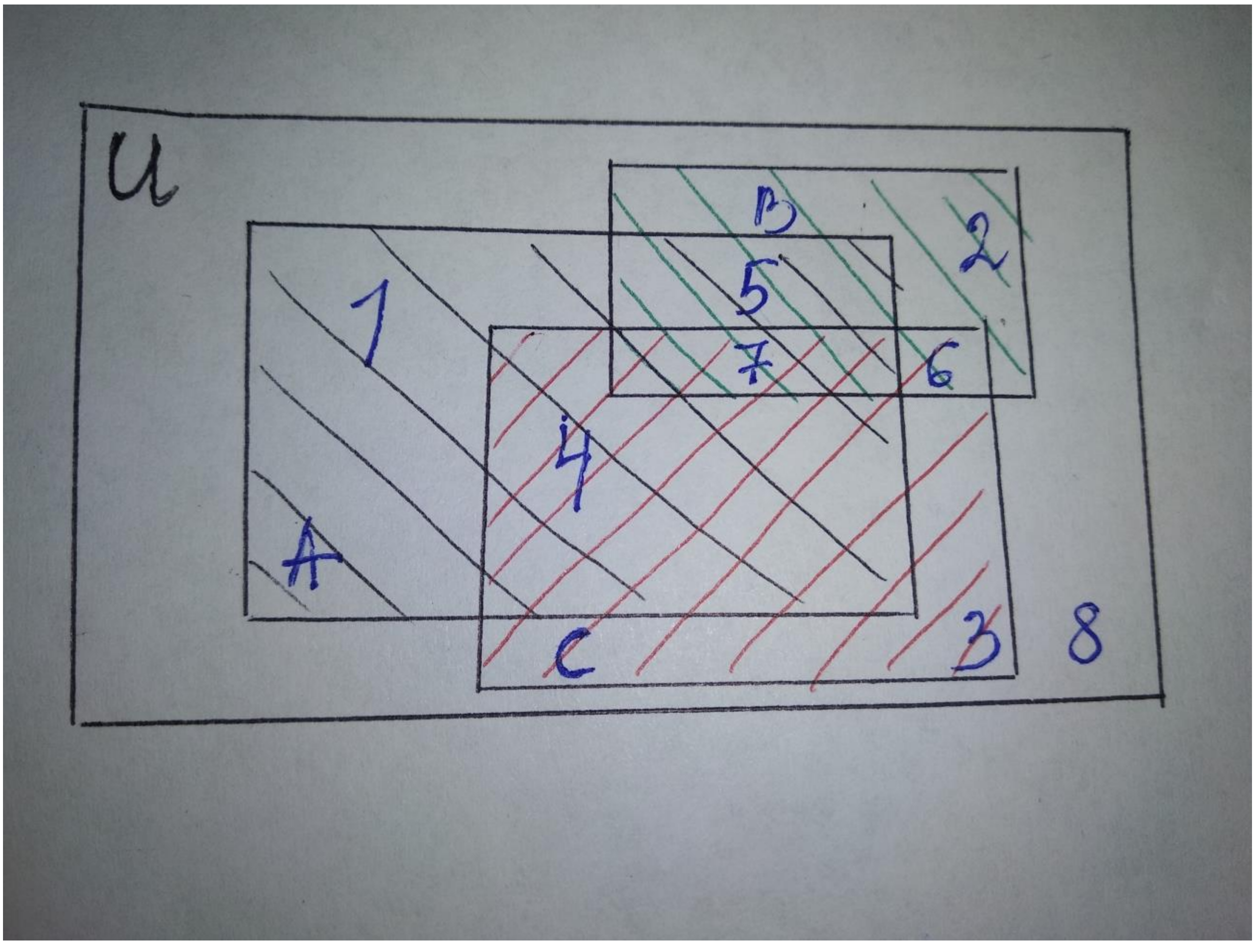
Следовательно, D=F, множества D и F включены в множество E.

Ответ: D=F, множества D и F включены в множество E.

Задание 1. 1. 6 Проверить, что для любых множеств *A*, *B*, *C* выполнение включения α влечёт выполнение включения β.

$$\alpha: A \cup B \subseteq C$$
$$\beta: B \backslash A \subseteq B \cap C$$

Решение: Изобразим множества *A*, *B*, *X* в виде прямоугольников, расположенных на плоскости в общем положении, и поставим в каждой области, на которые плоскость разбита прямоугольниками, по одному символу.



$$U: 1,2,3,4,5,6,7,8$$

$$A: 1,4,5,7$$

$$B: 2,5,6,7$$

$$C: 3,4,7,6.$$

$$A \cup B = 1,2,4,5,6,7$$

$$\alpha: A \cup B \subseteq C = 3,4,6,7$$

Тогда

$$A: 4,7$$

$$B: 6,7$$

$$C: 3,4,6,7$$

$$B \backslash A = 6$$

$$B \cap C = 6,7$$

$$\beta: B \backslash A \subseteq B \cap C$$

$$6 \subseteq 6,7$$

верно, если выполнено $A \cup B \subseteq C$, значит α влечёт выполнение включения β.

Задание 1. 1. 7 Для произвольных множеств A,B,H проверить, является ли выполнение включения α необходимым и достаточным условием выполнения равенства β.

$$\alpha : A \subseteq B \cap H$$
$$\beta : A\Delta B \subseteq (B\backslash H) \cup (B\backslash A)$$

1) ⇒

A=1,4,5,7

B=1,2,6,7

H=3,4,6,7

$$\alpha : A \subseteq B \cap H$$

Следует, что

$$\beta : A\Delta B \subseteq (B\backslash H) \cup (B\backslash A)$$

$$B \cap H = 6{,}7, \text{тогда } A = 7.$$

1,4,5 пусто.

A=7

B=2,6,7

H=3,6,7

$$A\Delta B = 2{,}6$$

$$B\backslash H = 2$$

$$B\backslash A = 2{,}6$$

$$(B\backslash H) \cup (B\backslash A) = 2{,}6$$

2) ⇐

A=1,4,5,7

B=1,2,6,7

H=3,4,6,7

$$A\Delta B = 1{,}2{,}4{,}6$$

$$B\backslash H = 2{,}5$$

$$B\backslash A = 2{,}6$$

$$(B\backslash H) \cup (B\backslash A) = 2{,}5{,}6$$

Тогда 1,4,5 пусто.

A=7

B=2,6,7

H=3,6,7

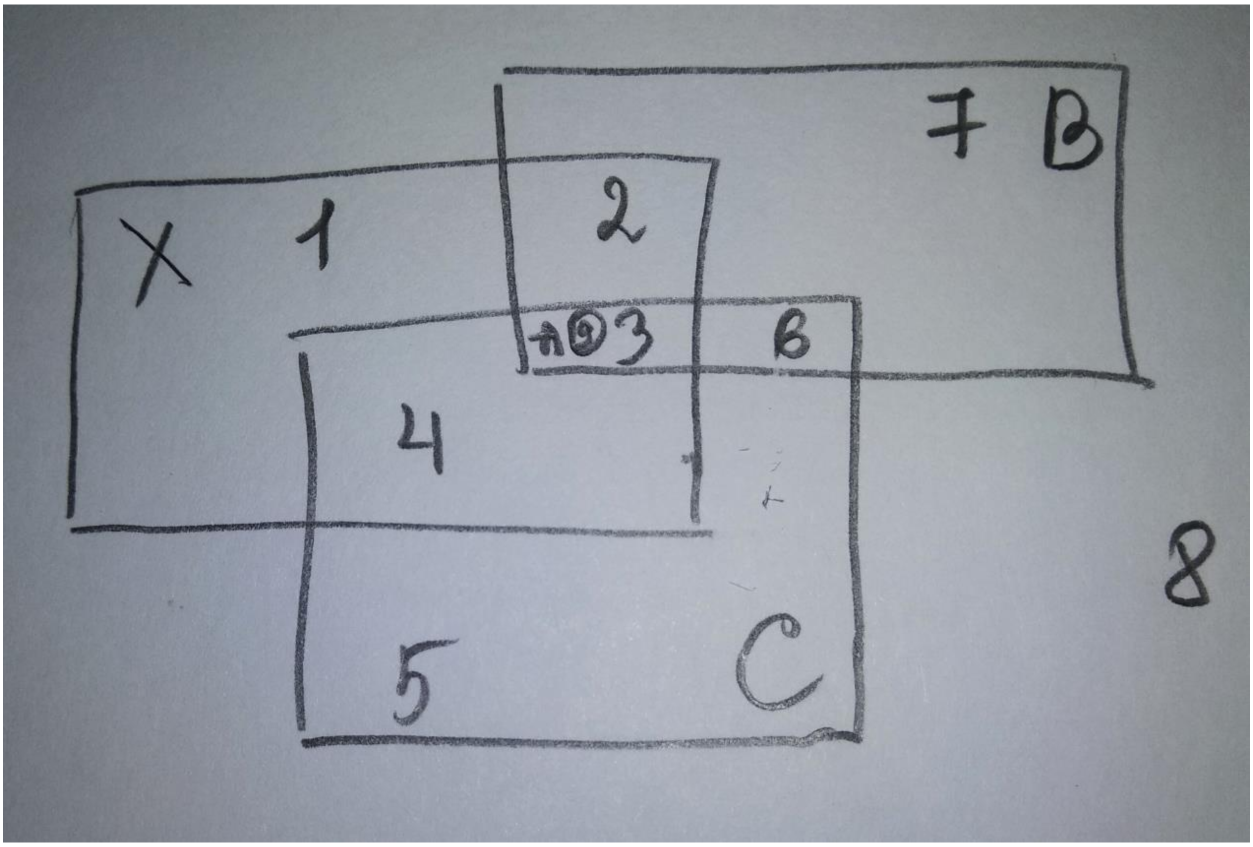
$$B \cap H = 6{,}7\ ;7 \subseteq 6{,}7(\text{верно}).$$

Задание 1. 1. 8 Решить систему соотношений относительно множества X и указать условия совместности системы.

$$\begin{cases} A \backslash B = C \backslash X \\ B \cup X = C \backslash A \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$$

Решение:

Построим множества общего положения A,B,X, C.



A=9
B=2,7,6,3,9
C=3,4,5,6,9
X=1,2,3,4,9
U=1,2,3,4,5,6,7,8,9
В силу первого равенства имеем:

$$A \backslash B = C \backslash X$$

0 должен равняться 5,6.
Значит множества 5 и 6 пусты.
A=9

B=2,7,3,9
C=3,4,9
X=1,2,3,4,9

$$B \cup X = C \setminus A$$

Получаем
1,2,3,4,7,9 =3,4
Значит множества
1,2,7,9 пусты.
A=0
B=3
C=3,4
X=3,4
Проверим, что множество X=C является решением исходной системы.

$$\begin{cases} A \setminus B = C \setminus X \\ B \cup X = C \setminus A \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$$

Если A=0,то

$$B \cup X = C$$

$C \setminus X = 0,$ тогда $C = X.$
Ответ:X=C, A=0, $A \subseteq B \subseteq C.$
Задание 1.1.10 Для произвольных множеств A, B, C, D проверить равносильность систем α и β.

$$\alpha: \begin{cases} C \cap B \subseteq A \cap D \\ B \cap D \subseteq C \cup A \\ B \subseteq D \cup C \end{cases}$$

$$\beta: \begin{cases} B \setminus D \subseteq AD \setminus A \\ C \cap B \subseteq A \cup D \\ B \subseteq A \cup \overline{D} \end{cases}$$

Решение:
Построим множества общего положения A, B, C, D, являющиеся подмножествами универсального множества U. Для этого выпишем все 16 различных двоичных наборов размерности 4. Пусть разряды этих наборов слева направо соответствуют множествам A, B, C,D.

	A	B	C	D
1	0	0	0	0
2	0	0	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	1	1
5	0	1	0	0
6	0	1	0	1
7	0	1	1	0
8	0	1	1	1
9	1	0	0	0
10	1	0	0	1

11	1	0	1	0
12	1	0	1	1
13	1	1	0	0
14	1	1	0	1
15	1	1	1	0
16	1	1	1	1

A=9,10,11,12,13,14,15,16
B=5,6,7,8,13,14,15,16
C=3,4,7,8,11,12,15,16
D=2,4,6,8,10,12,14,16
U=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16
1)

$$\alpha: \begin{cases} C \cap B \subseteq A \cap D \\ B \cap D \subseteq C \cup A \\ B \subseteq D \cup C \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 7,8,15,16 \subseteq 10,12,14,16 \\ 6,8,14,16 \subseteq 3,4,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16 \\ 5,6,7,8,13,14,15,16 \subseteq 2,3,4,6,7,8,10,11,12,14,15,16 \end{cases}$$

Следовательно 7,8,15,6,5,13 пусто
A=9,10,11,12,14,16
B=14,16
C=3,4,11,12,16
D=2,4,6,10,12,14,16

$$\alpha: \begin{cases} C \cap B(16) \subseteq A \cap D(10,12,14,16)(\text{верно}) \\ B \cap D(14,16) \subseteq C \cup A(3,4,9,10,11,12,14,16) \\ B(14,16) \subseteq D \cup C(2,3,4,6,10,11,12,14,16)(\text{верно}) \end{cases} \quad (\text{верно})$$

2)
A=9,10,11,12,13,14,15,16
B=5,6,7,8,13,14,15,16
C=3,4,7,8,11,12,15,16
D=2,4,6,8,10,12,14,16

$$\overline{D} = 1,3,5,7,9,11,13,15$$

U=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16

$$\beta: \begin{cases} B \setminus D \subseteq D \setminus A \\ C \cap B \subseteq A \cup D \\ B \subseteq A \cup \overline{D} \end{cases} \text{или} \begin{cases} 5,7,13,15 \subseteq 2,4,6,8 \\ 7,8,15,16 \subseteq 2,4,6,8,9,10,11,12,13,14,15,16 \\ 5,6,7,8,13,14,15,16 \subseteq 1,3,5,7,9,10,11,12,13,14,15,16 \end{cases}$$

Следовательно 5,6,7,8,13,15 пусто
A=9,10,11,12,14,16
B=14,16
C=3,4,11,12,16
D=2,4,10,12,14,16
3)Так как множества совпадают, то системы систем α и β равносильны.

Задание 1.2.1.

1. Проверить справедливость равенства α для
множества

A={1,2}; B={2,3}; C={1,3}

2. Выяснить, верно ли равенство α для произвольных A,B,C

$$B \times A = (B \times (A \backslash C)) \cup (B \times (A \cap C))$$

Решение:

1)

$$B \times A = (B \times (A \backslash C)) \cup (B \times (A \cap C))$$
$$B \times A = \{(2;1)(2;2)(3;1)(3;2)\}$$
$$A \backslash C = 2$$
$$B \times (A \backslash C) = \{(2;2)(3;2)\}$$
$$A \cap C = 1$$
$$B \times (A \cap C) = \{(2;1)(3;1)\}$$
$$\big(B \times (A \backslash C)\big) \cup \big(B \times (A \cap C)\big) = \{(2;2)(3;2)(2;1)(3;1)\}.$$

2) $B \times A = (B \times (A \backslash C)) \cup (B \times (A \cap C))$

$$(B \times (A \backslash C)) \cup (B \times (A \cap C)) = B((A \backslash C)) \cup ((A \cap C))) = B \times A.$$

Задание 1.2.2

Для данного графика P найти:

$$P^{-1}, P^{\circ}P, P^{-1\circ}P, \text{пр}_2(P^{-1\circ}P) \times \text{пр}_1(P^{\circ}P).$$

$$P = (a,b),(b,c),(c,a),(b,b),(c,b).$$

Решение:

По определению инверсии

$$P^{-1} = (b,a),(c,b),(a,c),(b,b),(b,c);$$

По определению композиции

$$P^{\circ}P = (a,c),(a,b),(b,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c);$$
$$P^{-1\circ}P = (a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b);$$
$$\text{пр}_2(P^{-1\circ}P) = \{a,b,c\}$$
$$\text{пр}_1(P^{\circ}P) = \{a,b,c\}$$
$$\text{пр}_2(P^{-1\circ}P) \times \text{пр}_1(P^{\circ}P)$$
$$= (a,b),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c).$$

Задание 1.2.3.

Для данных графиков P и T решить относительно графика X уравнение X°P=T при условии, что |X|=6, $\text{пр}_2 X =$ пр_1\{1,2,3,4,5,6\}.Длякаждогонайденного X указать P X .

P=(4,2),(3,2),(5,3),(2,1),(6,6)

T=(3,6),(1,2),(5,3),(4,1),(2,2)

Решение. Для каждой пары (a,b)∈T ищем пару (x,b)∈P. Если такая пара существует, то (a,x) может принадлежать графику X.

Запишем множество A, составленное из пар вида (a,x), отвечающих парам (a,b)∈T:

A=(3,6),(1,4),(1,3),(5,5),(4,2),(2,4),(2,3)

Так как по условию задачи 6∈ $пр_1$X, то пара (6,x)∈ X. Однако в графике T нет пары,начинающейся на 6. Поскольку в графике P нет пары, начинающейся на 1, то x=1, т.е. для пары

(6,1)∈X не найдется подходящей (для композиции) пары из графика P.
Составим X , добавляя к паре (6,1)пары из графика A , так чтобы выполнилось условие задачи. Получим два варианта решения:

$$X_1 = (3,6),(1,4),(5,5),(4,2),(2,3),(6,1)$$

$$X_2 = (3,6),(1,3),(5,5),(4,2),(2,4),(6,1)$$

Проверкой убеждаемся в том, что X_1 и X_2 являются решениями исходного уравнения. Согласно определению композиции, выпишем P °X_1 и P °X $_2$:

$$P°X_1 = (4,3),(3,3),(5,6),(2,4),(6,1)$$

$$P°X_2 = (4,4),(3,4),(5,6),(2,3),(6,1)$$

Ответ: $X_1 = (3,6),(1,4),(5,5),(4,2),(2,3),(6,1)$;$X_2 = (3,6),(1,3),(5,5),(4,2),(2,4),(6,1)$; $P°X_1 = (4,3),(3,3),(5,6),(2,4),(6,1)$;$P°X_2 = (4,4),(3,4),(5,6),(2,3),(6,1)$.

Задание 1.3.1. Дано соответствие Г =(X,Y,G).

1. Изобразить соответствие в виде графа.

2. Выяснить, какими из 4 основных свойств (всюду определённость, сюръективность, функциональность, инъективность) обладает Г .

3. Найти образ множества A и прообраз множества B при данном соответствии.

4. Построить соответствие между бесконечными множествами, обладающее тем же набором свойств, что и Г .

5. Построить соответствие между конечными множествами, обладающее набором свойств, противоположным набору свойств соответствия Г .

Замечание. Для данного и построенных соответствий отметить случаи отображений, указать их тип, отметить случаи биекций.

X=a,b,c,d

Y=1,2,3,4

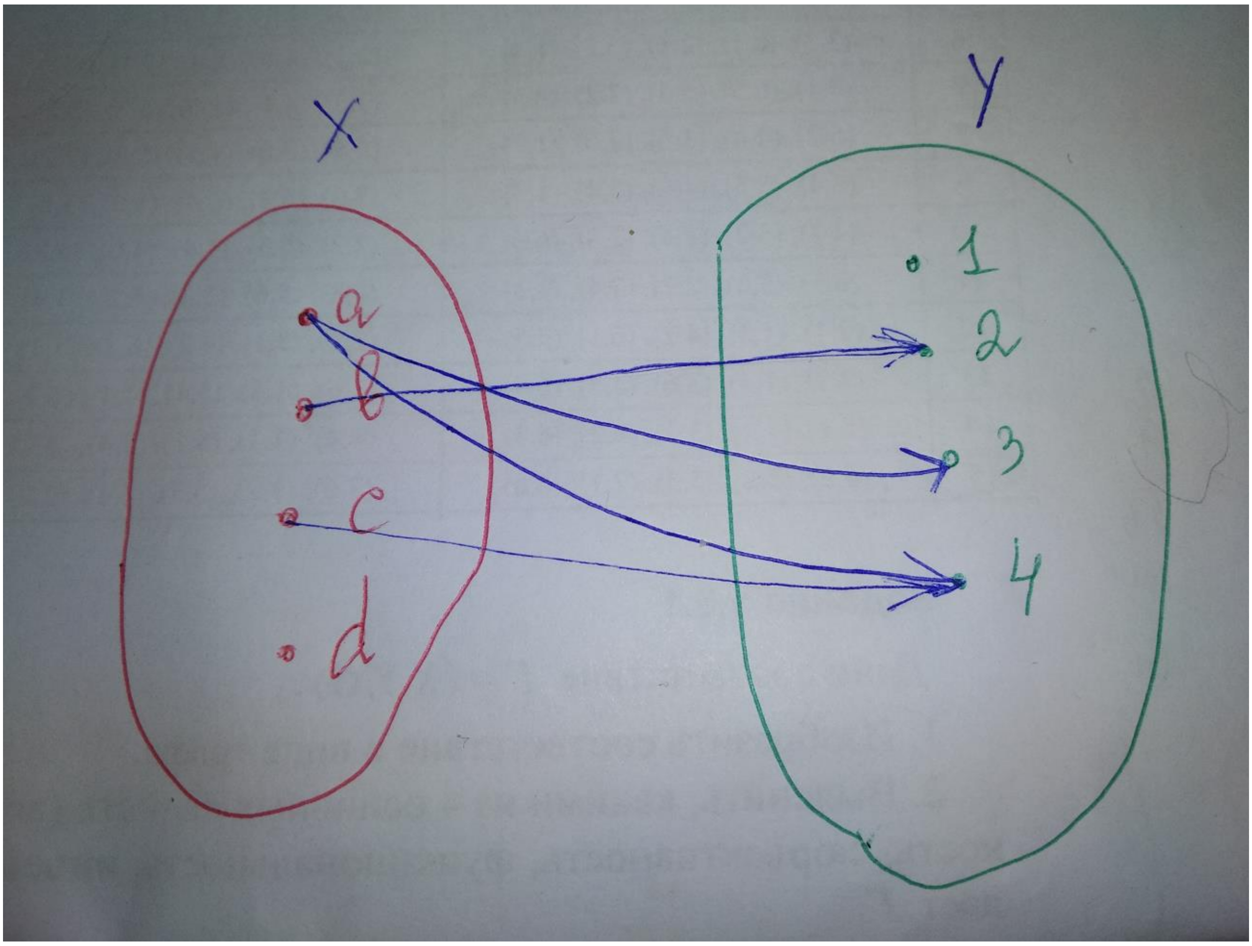
G=(a,4),(c,4),(b,2),(a,3)

A=a,b

B=2,4

Решение:

1. Изобразить соответствие в виде графа.



2. Выяснить, какими из 4 основных свойств (всюду определённость, сюръективность, функциональность, инъективность) обладает Г .

а) Соответствие не всюду определено, так как пр$_1$ G={a,b,c}≠X .

б) Соответствие не является сюръективным, так как пр$_2$ G={2,3,4}≠Y .

в) Соответствие не является функциональным, так как его график содержит две пары (a,2) и (a,4) с одинаковыми первыми и различными вторыми координатами.

г) Соответствие не инъективно, так как его график G содержит пар с одинаковыми вторыми и различными первыми координатами (a,4) и (c,4).

3. Найти образ множества $\Gamma(A)$ и прообраз множества $\Gamma^{-1}(B)$ при данном соответствии.

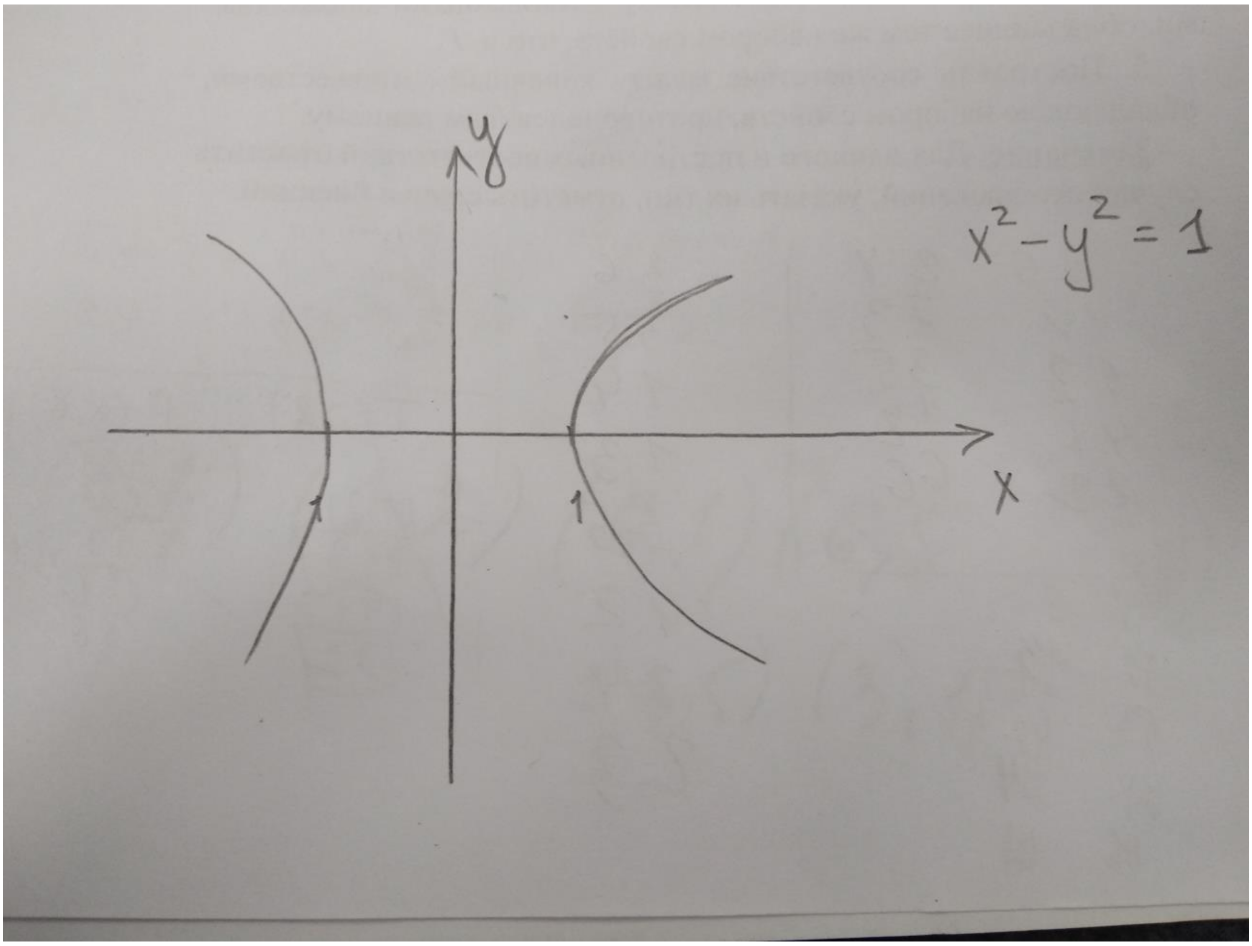
$$\Gamma(A) = \{2,3,4\}, \text{так как } A = \{a, b\} \text{ и } \{(a, 3), (a, 4), (b, 2)\} \subseteq G.$$

$$\Gamma^{-1}(B) = \{a, b, c\}, \text{так как } B = \{2,4\} \text{ и } \{(b, 2), (a, 4), (c, 4)\} \subseteq G$$

4. Построить соответствие между бесконечными множествами, обладающее тем же набором свойств, что и Г .

Кривая второго порядка гипербола будет обладать тем же набором свойств:

$X, Y \in (-\infty; +\infty), G = \{(x, y) | x^2 - y^2 = 1\}$.



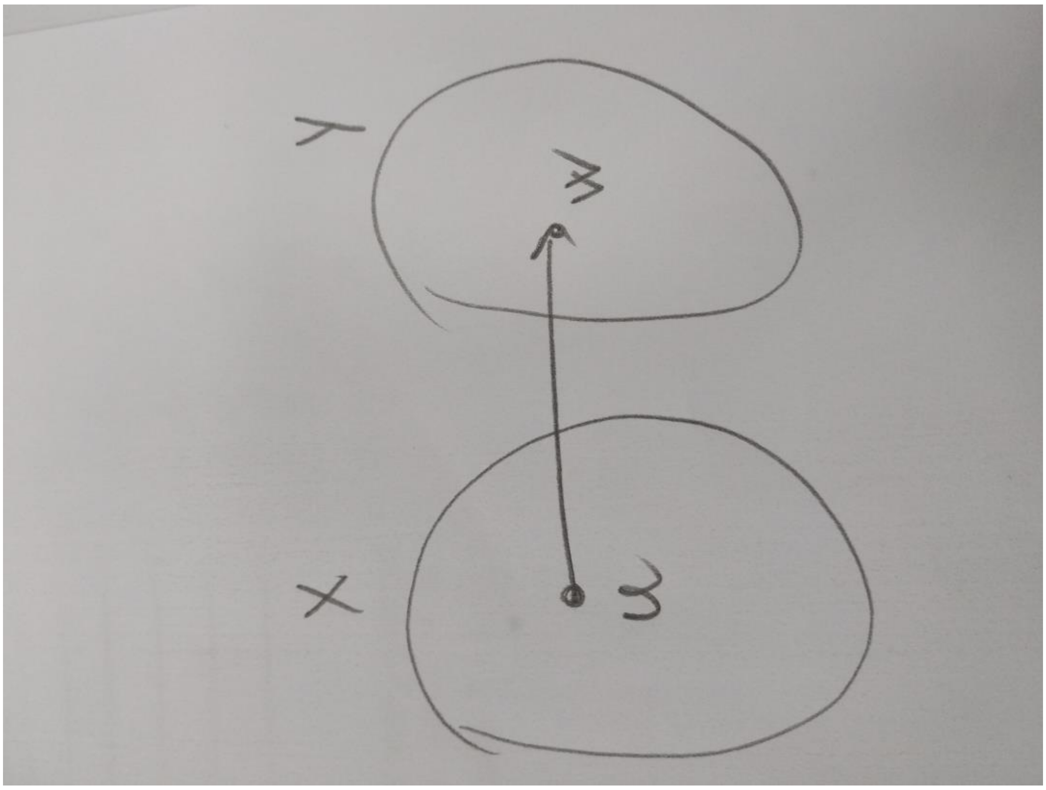
а) Соответствие не всюду определено, так как $пр_1$ G≠X .

б) Соответствие не является сюръективным, так как $пр_2$ G=≠Y .

в) Соответствие не является функциональным, так как его график содержит две пары (2,-t) и (2,t) с одинаковыми первыми и различными вторыми координатами.

г) Соответствие не инъективно, так как его график G содержит пар с одинаковыми вторыми и различными первыми координатами (-p,4) и (p,4).

5. Построить соответствие между конечными множествами, обладающее набором свойств, противоположным набору свойств соответствия Г .



X=u; Y=v; G=(u,v)

а) Соответствие не всюду определено, так как пр$_1$ G={u}=X .

б) Соответствие не является сюръективным, так как пр$_2$ G={v}=Y .

в) Соответствие является функциональным, так как в его графике нет пар с одинаковыми первыми и разными вторыми координатами.

г) Соответствие инъективно разные элементы переходят в разные значения.

Задание 1.4.2

1. Выяснить, какими из свойств: рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, связность обладает данное отношение $\Phi = (A, G)$.

2. Выяснить, что представляет из себя отношение $\Phi\circ\Phi, \Phi\circ\Phi^{-1}$.

3.Построить на конечном множестве отношение, обладающее таким же набором свойств, что и данное. Изобразить его графом и аналитически.

4.Построить на бесконечном множестве отношение, обладающее набором свойств, противоположным данному. В случае невозможности построения доказать противоречивость набора требований.

<u>Замечание. </u>В случае отношений эквивалентности указать классы эквивалентности, фактор – множество, индекс разбиения. В случае отношений частичного или линейного порядка указать максимальные, минимальные, а также наибольшие и наименьшие элементы (если они существуют).

$A = [0,4]; G = \{x\varphi y \leftrightarrow x > 2y + 1\}$

Решение:

1.

рефлексивность не выполняется, так как для любого элемента из отрезка [0,4] $G = \{x\varphi x \leftrightarrow x > 2x + 1; -x > 1(\text{верно})\}$

антирефлексивность не выполняется,

симметричность не выполняется, так как 1>2*0+1>1 не следует 0>2*1+1=3

антисимметричность выполняется,

транзитивность не выполнено, 2>2*1+1; 1>2*0>1 не следует 2>2*1+1=3

связность не выполняется.

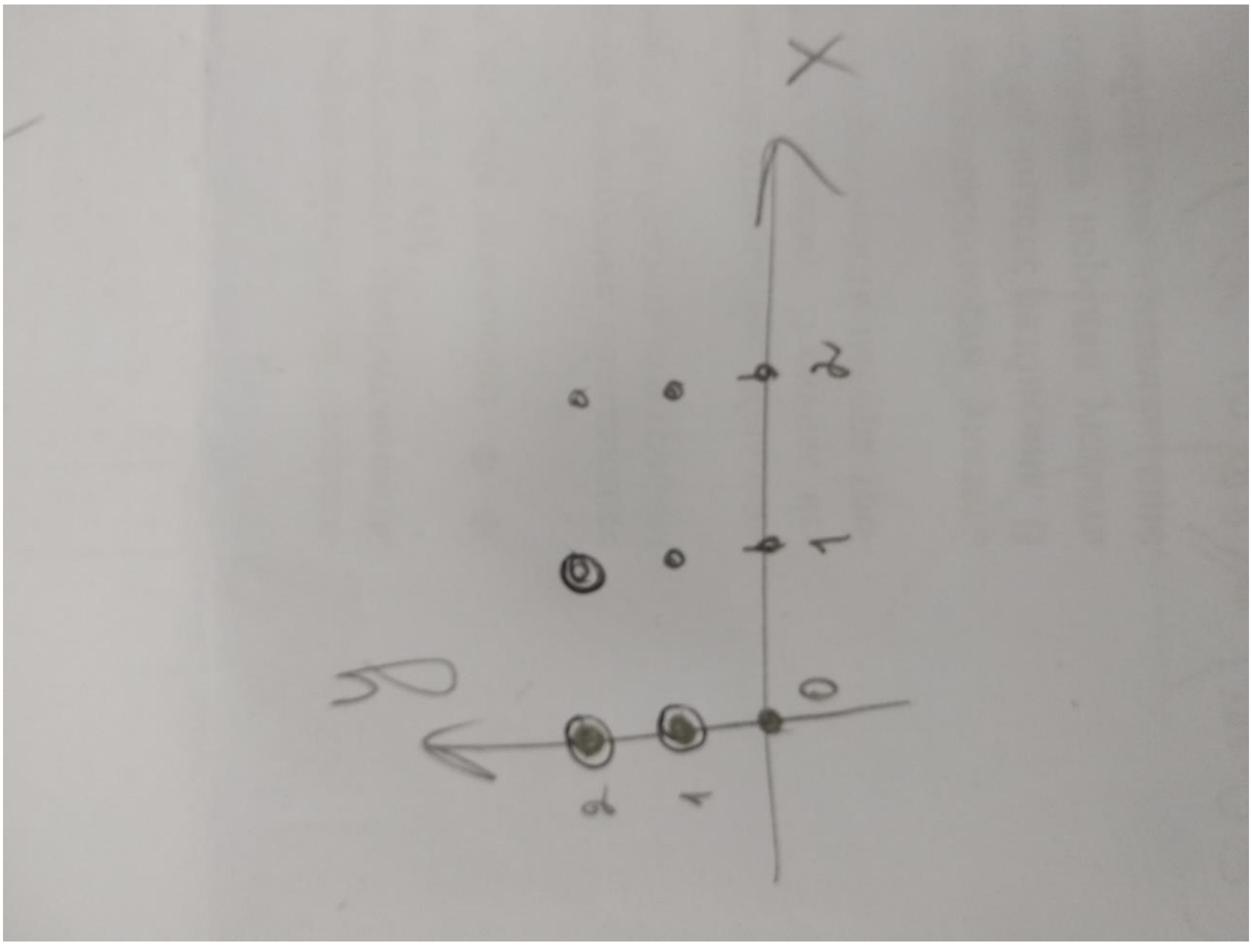
2. Выяснить, что представляет из себя отношение $\Phi°\Phi, \Phi°\Phi^{-1}$.

По определению композиции $x\varphi°y\varphi$ означает, что найдется z такой, что $x\varphi z$ и $z\varphi y$. То в отношение Ф°Ф будут вступать такие пары x>2y+1 и найдется z т.ч. z>2y+1.

По определению композиции $\Phi°\Phi^{-1}$ вступаю пары x и y, для которых найдется z такой, что x>2z+1 и z>2y+1.

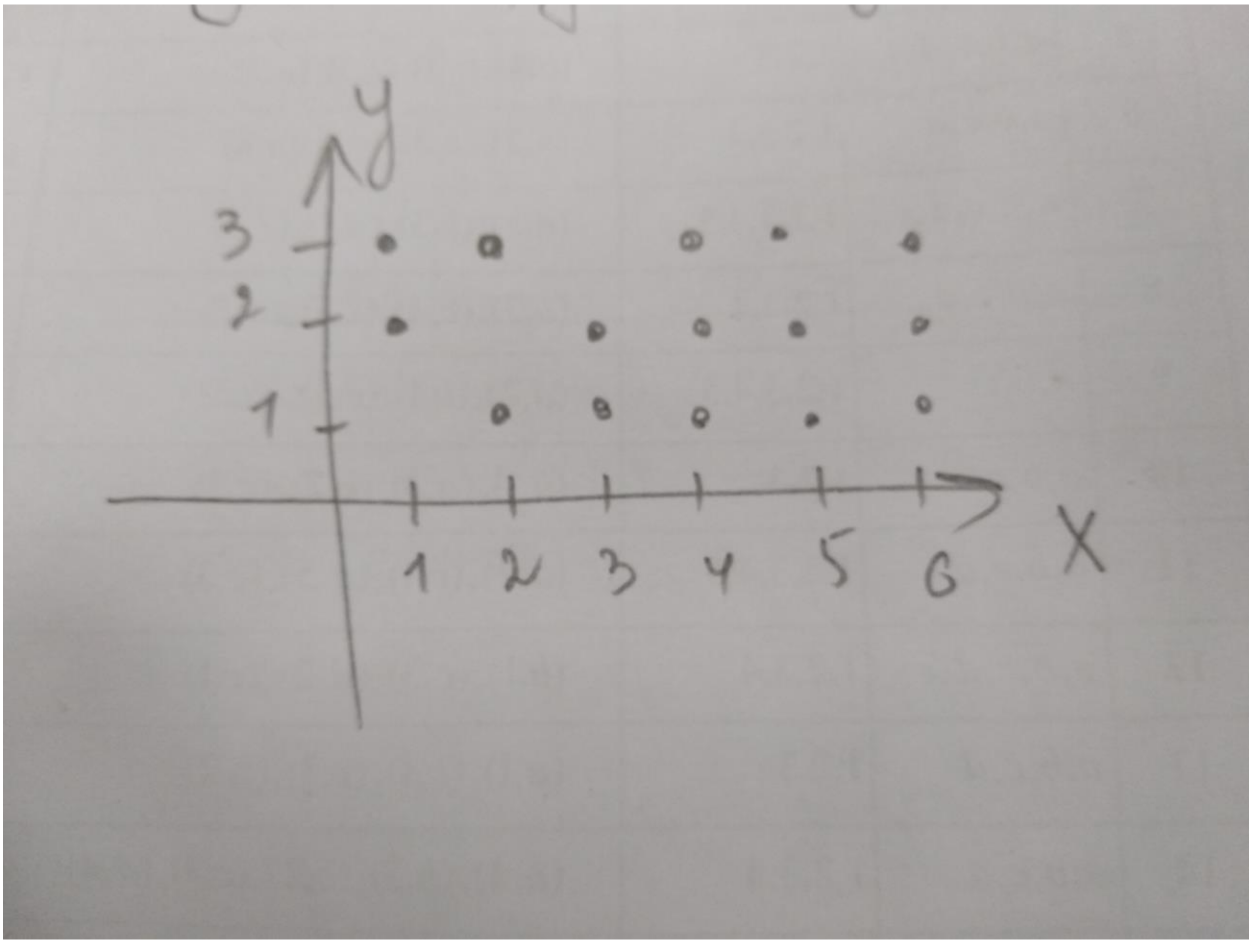
3.Построить на конечном множестве отношение, обладающее таким же набором свойств, что и данное. Изобразить его графом и аналитически.

$$G = \{x, y | x < y;\ x, y\ \in [0; 2]\}$$



4.Построить на бесконечном множестве отношение, обладающее набором свойств, противоположным данному. В случае невозможности построения доказать противоречивость набора требований.

$$G = \{x, y | x \neq y, x, y \in N\}$$



Задание 1.4.4

Для данного отношения $\Phi = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, G)$ проделать следующее:

1.Изобразить Ф графом.

2. Достроить Ф до отношения эквивалентности, указать фактор-множество.

3.Достроить Ф до отношения частичного порядка, указать максимальные, минимальные элементы, а также пары несравнимых элементов.

4.Достроить Ф до отношения линейного порядка, указать наибольший и наименьший элементы.

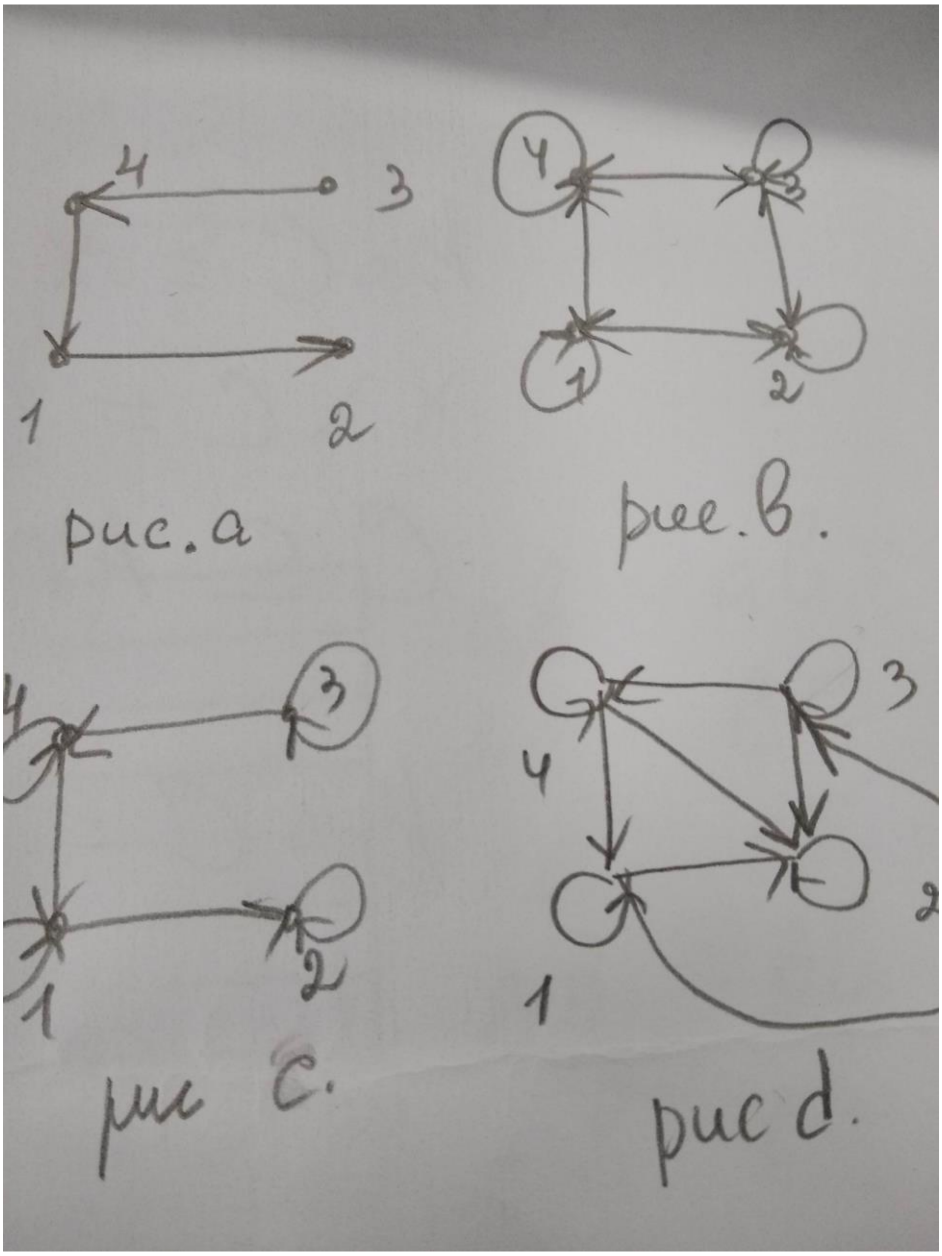
5.Достроить Ф до отношения строгого порядка.

6.Достроить Ф до отношения строгого линейного порядка.

Замечание. Отношение достраивается с помощью введения минимального необходимого числа дополнительных рёбер.

Решение:$G = (3,4)(4,1)(1,2)$.

1.Изобразить Ф графом рис.а.



2. Достроить Ф до отношения эквивалентности, указать фактор-множество.

Добавим минимальное возможное число ребер, обозначим график полученного отношений эквивалентности через G_1(рис. b).

$$G_1 = (3,4)(4,1)(1,2)(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(4,3)(1,4)(21)(3,2)(2,3)$$

Фактор-множество для А={1, 2, 3, 4, 5} по отношению Φ_1: $A/_{\varphi_1} = \{1,2,3,4\}$ индекс равен 1.

3.Достроить Ф до отношения частичного порядка, указать максимальные, минимальные элементы, а также пары несравнимых элементов рис. с.

$$G_2 = (3,4)(4,1)(1,2)(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)$$

максимальные элементы-1,2,4

минимальные элементы -3

4.Достроить Ф до отношения линейного порядка, указать наибольший и наименьший элементы рис.d.

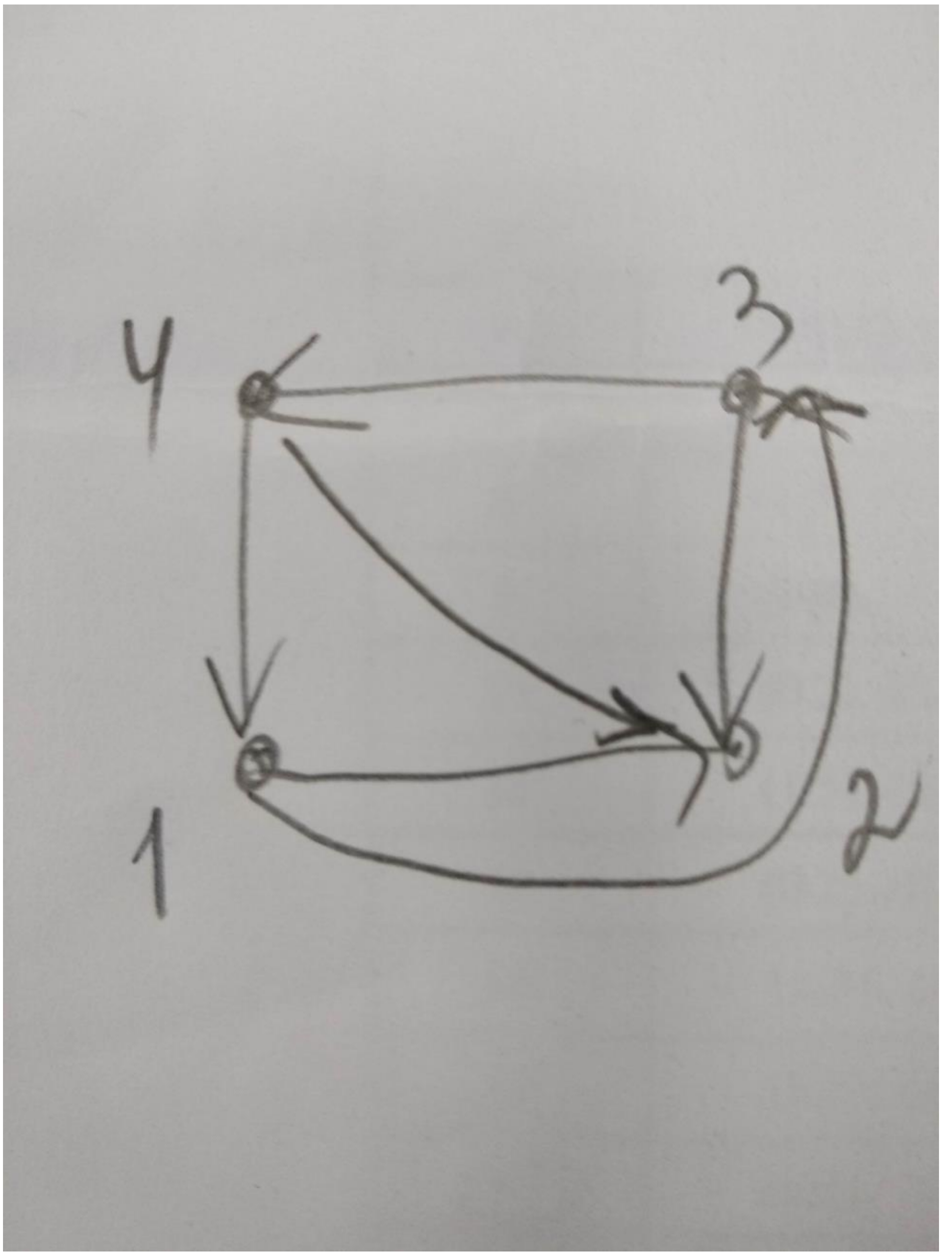
$$G_3 = G_2 \cup (4,2)(3,2)(1,3)$$

Наибольший элемент –2

Наименьший элемент-1,34

5.Достроить Ф до отношения строгого порядка. Само исходное отношение является отношением строгого порядка, так что достраивать его нет необходимости.

6.Достроить Ф до отношения строгого линейного порядка.



$G_4 = G_3 \backslash \Delta_A = \{(1,2)(1,3)(4,1)(4,2)(3,4)(3,2\}$.