

Цепи переменного синусоидального однофазного тока

Вопросы теории и расчета цепей однофазного переменного тока рассмотрены далее на нескольких примерах решения типовых задач.

1 Способы изображения синусоидальных электрических величин

Задача № 1

Построить временную диаграмму, определить амплитудное, действующее и комплексное значения для напряжения, мгновенное значение которого изменяется по закону $U = 169 \cdot \sin(314 \cdot t + 45^\circ)$.

Решение

1 Известно несколько способов представления величин, изменяющихся по синусоидальному закону, в виде:

- графиков изменения функций во времени,
- тригонометрических функций,
- вращающихся векторов,
- комплексных чисел.

В данной задаче напряжение задано тригонометрической функцией,

$$u = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_H) = U = 169 \cdot \sin(314 \cdot t + 45^\circ) \quad (3.1)$$

где u - мгновенное значение напряжения или значение переменной величины в данный момент времени;

U_m - амплитудное значение напряжения;

ω - угловая частота;

ψ_H - начальная фаза – угол, определяющий значение функции в начальный момент времени;

$\omega \cdot t + \psi_H$ - фаза колебания, характеризующая развитие процесса во времени.

Из выражения (3.1) имеем: $U_m = 169 \text{ В}$; $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$; $\psi_H = 45^\circ$, а также видно, что напряжение изменяется по закону синусоиды и может быть изображено графиком функции во времени (временной диаграммой).

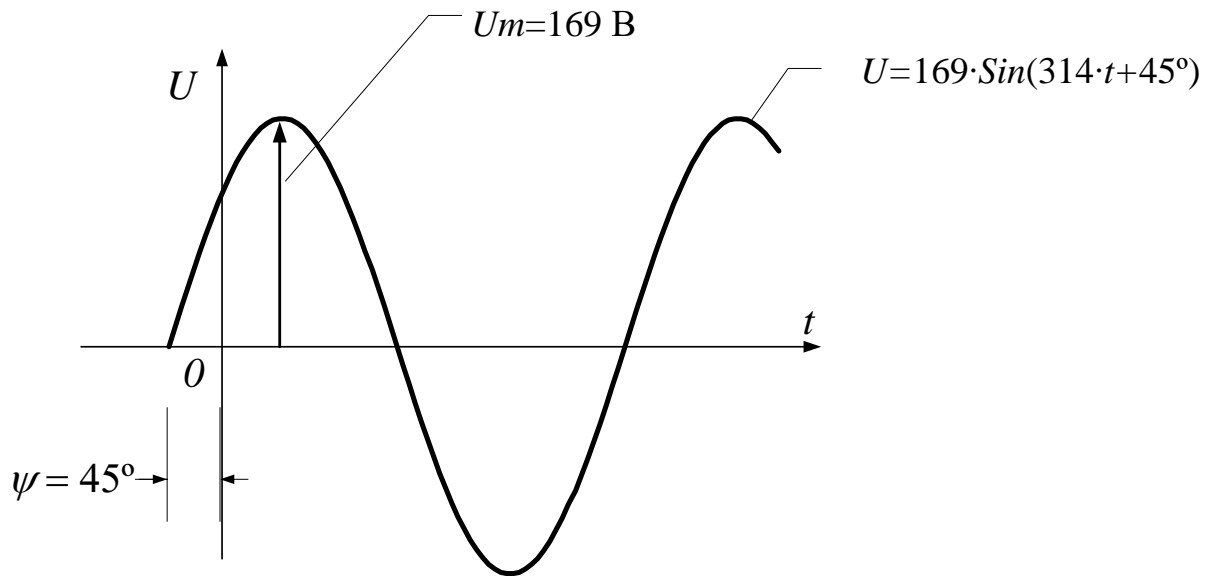


Рисунок 3.1 - Временная диаграмма напряжения

Действующее значение напряжения определим из соотношения

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707U_m = 0,707 \cdot 169 = 120 \text{ В}. \quad (3.2)$$

Среднее значение

$$U_{cp} = \frac{2}{\pi}U_m = 0,637U_m = 0,637 \cdot 169 = 108 \text{ В}. \quad (3.3)$$

3. Известно, что вертикальная проекция вращающегося радиуса-вектора изменяется по закону синусоиды. Поэтому возможно обратное: синусоиду можно заменить радиусом-вектром, длина которого равна амплитуде ($U_m = 169 \text{ В}$), а скорость вращения - угловой скорости данной синусоидальной волны ($\omega = 314 \text{ с}^{-1}$).

Для момента времени $t = 0$; $\omega \cdot t + \psi_H = \psi$; $u = U_m \sin \psi$, положение радиуса-вектора показано на рисунке 3.2.

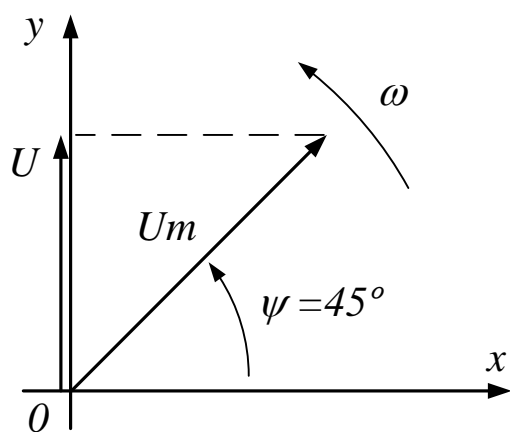


Рисунок 3.2 - Вектор напряжения

5. Поместим данный вектор в комплексную плоскость (рисунок 3.3).

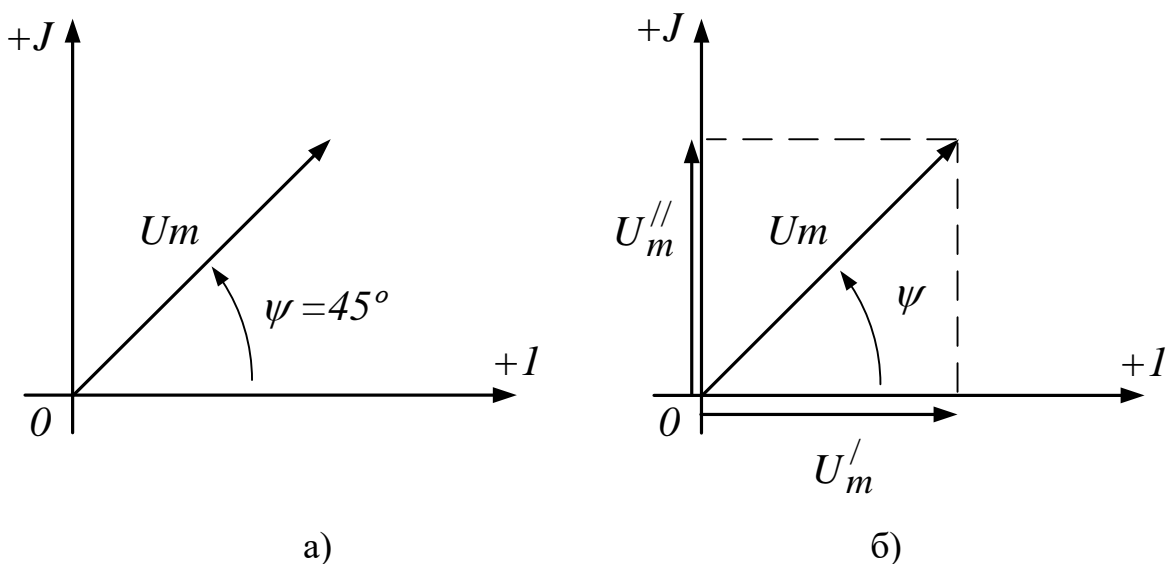


Рисунок 3.3 - Вектор напряжения в комплексной плоскости (а) и его проекция (б) на оси U'_m и U''_m .

Вектору напряжения в комплексной плоскости соответствует комплексное число, которое может быть записано в формах:

$$\dot{U} = U'_m + jU''_m - \text{алгебраической,}$$

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} U'_m &= U_m \cos \psi_u, \quad U''_m = U_m \sin \psi_u \\ \dot{U} &= U_m \cos \psi_u + jU_m \sin \psi_u \\ \dot{U} &= 169 \cdot \cos 45^\circ + j169 \cdot \sin 45 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} - \text{тригонометрической} \quad (3.4)$$

$$\dot{U} = U_m \varepsilon^{j\psi_u} = 169 \cdot \varepsilon^{j45^\circ} - \text{показательной.}$$

2 Идеализированные элементы схем замещения цепей переменного тока

Задача № 2

Ток в цепи, содержащей резистор сопротивлением $R=10$ Ом (рисунок 3.3.), изменяется по закону

$$i = 10\sqrt{2} \sin 314 \cdot t.$$

Определить действующее значение тока и напряжения и записать закон изменения напряжения и мощности.

Построить векторную диаграмму и графики.

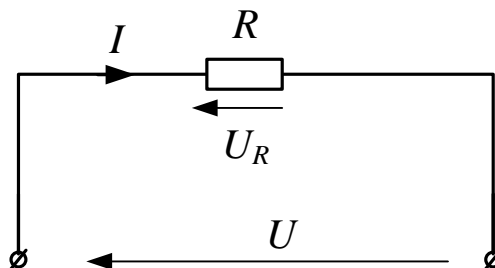


Рисунок 3.4 - Цепь с резистивным элементом

Решение

1. В идеальном резистивном (активном) элементе электрическая энергия источника полностью преобразуется в другие виды энергии. Сопротивление R - параметр резистора.

Из выражения,

$$i = I_m \sin \omega \cdot t = 10\sqrt{2} \sin 314 \cdot t \quad (3.5)$$

амплитудное значение тока равно: $I_m = 10\sqrt{2}$ А

Действующее значение тока равно: $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 10$ А.

2. По закону Ома для действующих значений напряжение равно:
 $U = RI = 10 \cdot 10 = 100$ В

По закону Ома мгновенных значений запишем выражение для мгновенного значения напряжения

$$u_R = R \cdot i = R \cdot I_m \sin \omega t = U_m \sin \omega t ; u = 100\sqrt{2} \sin 314 \cdot t. \quad (3.6)$$

Сравнивая выражения (3.5) и (3.6), видим, что **ток и напряжение в цепи с резистивным (активным) элементом в любой момент времени совпадают по фазе.**

3. На рисунке 3.5 показаны графики зависимостей тока и напряжения в функции времени - $i = F_1(t)$, $u_R = F_2(t)$.

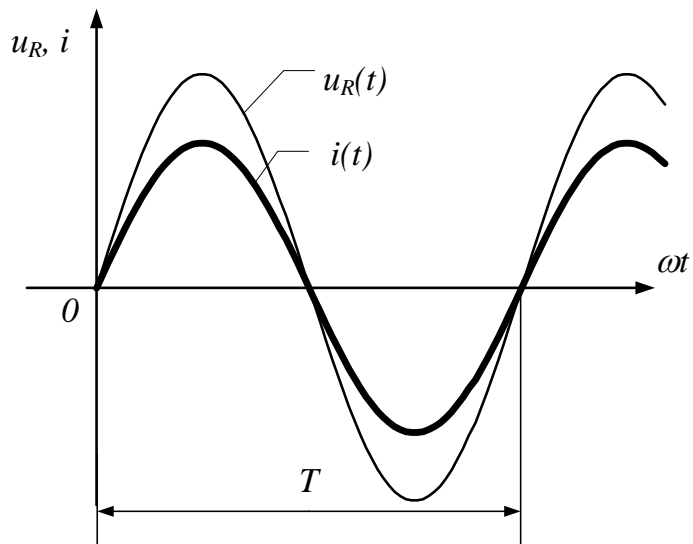
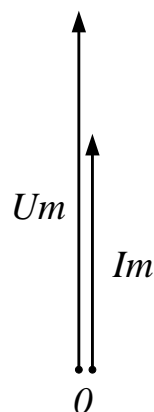


Рисунок 3.5 - Графики тока и напряжения на резистивном (активном) элементе

На векторных диаграммах для амплитудных и действующих значений тока и напряжения сдвиг фаз равен 0° . Отличие в построении этих диаграмм заключается в том, что длина всех векторов на диаграмме для действующих значений в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем длина соответствующих векторов на диаграмме для амплитудных значений.

Для амплитудных значений.



Для действующих значений

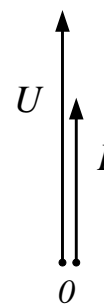


Рисунок 3.6 - Векторные диаграммы для резистивного (активного) элемента

3. Определим значение мощности в любой момент времени

$$P_R = i u_R = I_m \sin \omega t \cdot U_m \sin \omega t = I_m U_m \sin^2 \omega t = 2RI^2 \sin^2 \omega t$$

$$P_R = 2 \cdot 10^2 \sin^2 314 \cdot t. \quad (3.7)$$

Из выражения (3.7) видим, что мощность в цепи с резистивным (активным) элементом всегда положительна, т.е. вся энергия источника питания цепи на резисторе полностью преобразуется в полезную (в данном случае - тепловую) работу. График колебания мощности $P_R = F(t)$ приведен на рисунке 3.7.

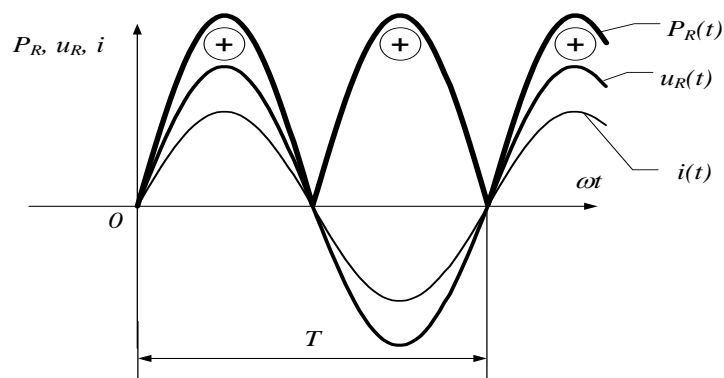


Рисунок 3.7 - График колебания мощности в цепи с идеальным резистивным элементом

Задача № 3

В цепи с индуктивным элементом (рисунок 3.8) ток изменяется по закону $i = 14,1 \sin 100 \cdot t$, индуктивность катушки в цепи $L = 0,1$ Гн.

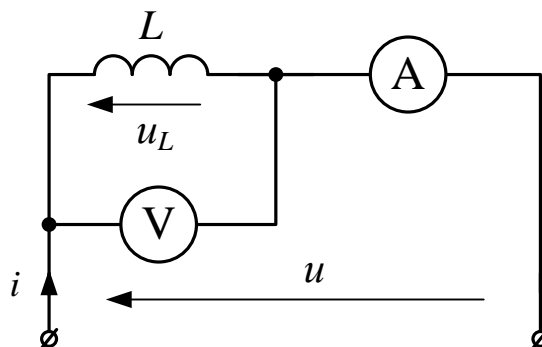


Рисунок 3.8 - Цепь с идеальным индуктивным элементом

Записать закон изменения напряжения и мощности, построить векторную диаграмму и графики $i = F_1(t)$, $u_L = F_2(t)$, $P_L = F_3(t)$.

Определить реактивное сопротивление цепи и показания приборов.

Решение

1. Идеальная индуктивная катушка - элемент цепи, в котором электрическая энергия источника преобразуется в энергию магнитного поля. Эта способность катушки характеризуется ее параметром - **индуктивностью L**.

Возникающая между концами катушки напряжение u_L идет на компенсацию ЭДС самоиндукции катушки e_L , противодействующей прохождению тока. Поэтому закон изменения напряжения для данной цепи определяется так:

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt}, \quad (3.8)$$

где

$$i = I_m \sin \omega t = 14,1 \sin 100 \cdot t; \quad (3.9)$$

$$u_L = L \frac{d(I_m \sin \omega t)}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = U_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (3.10)$$

В выражении (3.10)

$$U_m = \omega L I_m = 100 \cdot 0,1 \cdot 14,1 = 141 \text{ В} \quad (3.11)$$

$$u_L = 14,1 \sin (100 \cdot t + 90^\circ). \quad (3.12)$$

Анализируя выражение (3.9) и (3.12), видим, что напряжение на индуктивном элементе в любой момент времени опережает ток на угол, равный 90°.

2. Выражение ωL (3.11) является **реактивным индуктивным сопротивлением** - x_L реальной катушки,

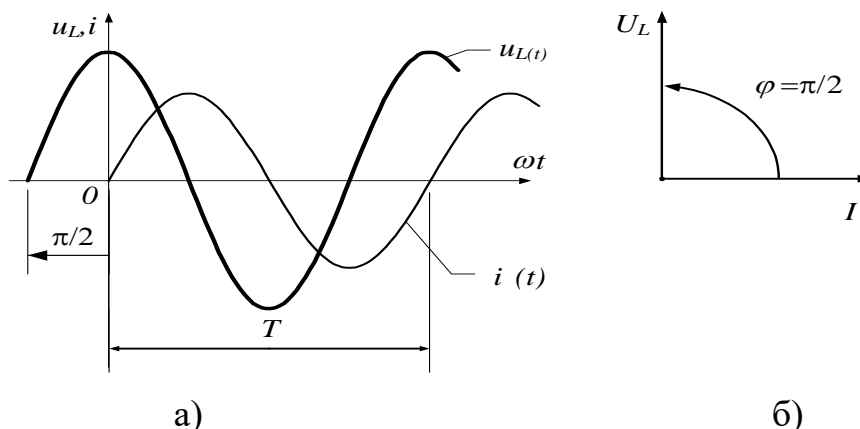
$$x_L = \omega L = 100 \cdot 0,1 = 10 \text{ Ом}.$$

3. Показание амперметра и вольтметра определяются как действующие значения

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{14,1}{1,41} = 10 \text{ А}; \quad A = I = 10 \text{ А}$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{141}{1,41} = 100 \text{ В}; \quad V = U = 100 \text{ В}$$

На рисунке 3.9 приведены графики изменения тока и напряжения, а также векторная диаграмма цепи.



а) графики функций $i = F_1(t)$, $u_L = F_2(t)$; б) векторная диаграмма.

Рисунок 3.9 - Ток и напряжение в цепи с индуктивностью

4 Запишем закон изменения мощности во времени

$$P_L = i u_L = I_m \sin \omega t \cdot U_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = U \cdot I \sin 2 \omega t ,$$

$$P_L = 100 \cdot 10 \sin 2 \cdot 100 \cdot t = 10^3 \sin 200 \cdot t . \quad (3.13)$$

Из выражения (3.13) видим, что мощность в цепи с индуктивностью колеблется с двойной частотой, относительно частоты изменения тока и напряжения.

Представим закон изменения мощности графиком (рисунок 3. 10).

С энергетической точки зрения, такой характер графика мощности описывает накопление энергии в магнитном поле катушки и возврат ее обратно в источник энергии. Сечение проводов цепи в этом случае используется неэкономично, полезной работы в цепи не совершается. Мощность, характеризующая обмен энергии в цепи, называют - **реактивной мощностью**.

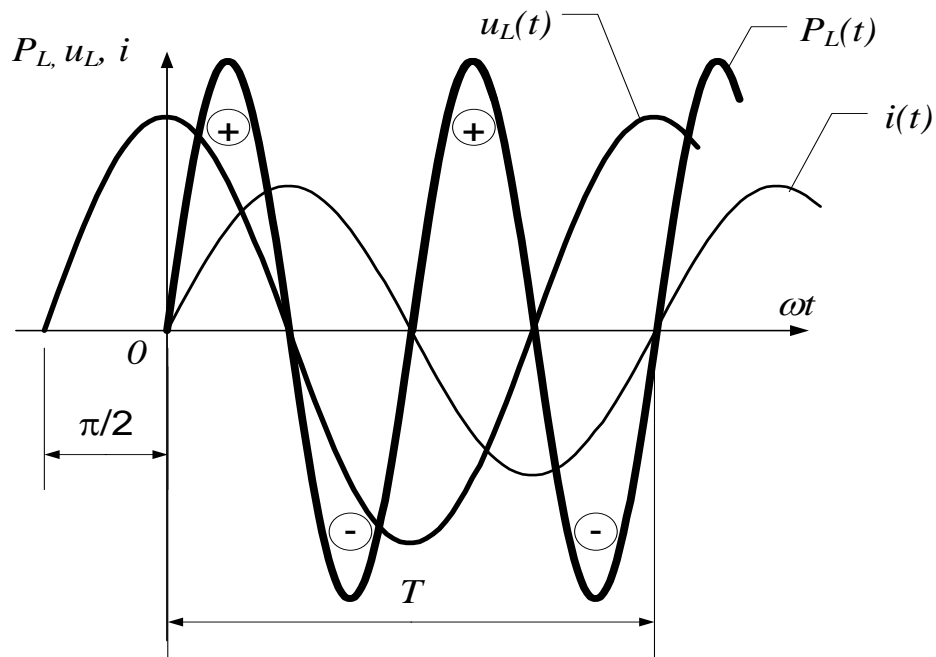


Рисунок 3.10 - График колебаний мощности на индуктивном элементе

Задача № 4

Записать закон изменения тока в цепи с идеальным конденсатором, найти действующие значения тока и напряжения, определить показания приборов, если напряжение на входе цепи изменяется по закону

$$u_C = 141 \sin 100 \cdot t \text{ и } C = 100 \text{ мкФ}$$

Построить векторную диаграмму и графики: $i = F_1(t)$, $u_C = F_2(t)$, $P_L = F_3(t)$.

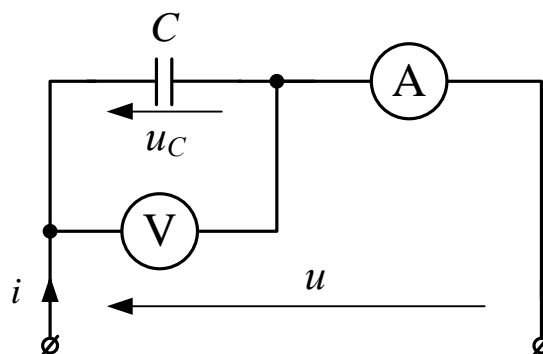


Рисунок 3.11 - Цепь с емкостным элементом

Решение

1. Идеальный конденсатор - элемент цепи, в котором электрическая энергия источника преобразуется в энергию электрического поля. Эта способность конденсатора характеризуется его параметром - емкостью C .

Если заряд на электродах конденсатора равен $q = CU$ (из курса физики), то через него протекает ток, который определяется как,

$$\boxed{i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU}{dt}}. \quad (3.14)$$

Отсюда видно, что причиной возникновения тока в конденсаторе является изменение напряжения на нем. Если напряжение не меняется, то ток через конденсатор равен нулю. Выражение (3.14) носит название **закона Ома для диэлектрика конденсатора**.

В нашем случае

$$\begin{aligned} u_C &= U_m \sin \omega t, \\ u_C &= 141 \sin 100 \cdot t \end{aligned} \quad (3.15)$$

Поэтому

$$i = C \frac{d(U_m \sin \omega t)}{dt} = C \omega U_m \cos \omega t$$

Переходя от косинуса к синусу, получаем

$$i = C \omega U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.16)$$

Из выражения (3.16) следует, что

$$I_m = C \omega U_m = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 141 = 1,41 \text{ A}$$

Значит мгновенное значение тока через конденсатор составит

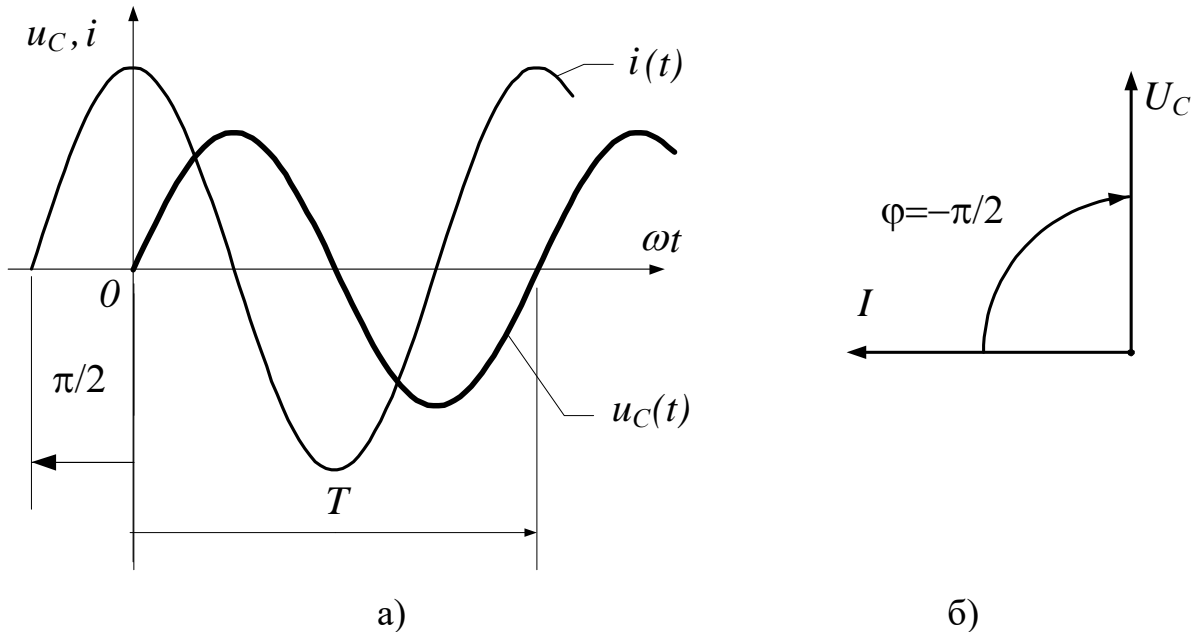
$$i = 1,41 \sin(100 \cdot t + 90^\circ). \quad (3.17)$$

2. Из выражений (3.16) и (3.17) найдем действующие значения напряжения и тока, а также показания приборов, поскольку они показывают данные значения

$$\begin{aligned} I &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{1,41}{1,41} = 1 \text{ A}; \quad A = I = 1 \text{ A} \\ U &= \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{141}{1,41} = 100 \text{ B}; \quad V = U = 100 \text{ B} \end{aligned}$$

3. Сравнивая выражения (3.15) и (3.16), видим, что **ток, протекающий через емкостной элемент в любой момент времени, опережает напряжение на угол, равный 90° .**

На рисунке 3.12 приведены графики: а) тока и напряжения на конденсаторе, б) векторная диаграмма тока и напряжения.



а) графики тока и напряжения; б) векторная диаграмма тока и напряжения.

Рисунок 3.12 - Ток и напряжение на емкостном элементе:

Мгновенная мощность емкости

$$P_C = u_C i = U_m \sin \omega t \cdot I_m \cos \omega t = U \cdot I \sin 2 \omega t ,$$

$$P_C = 100 \cdot 1 \sin 200 \cdot t .$$

(3.18)

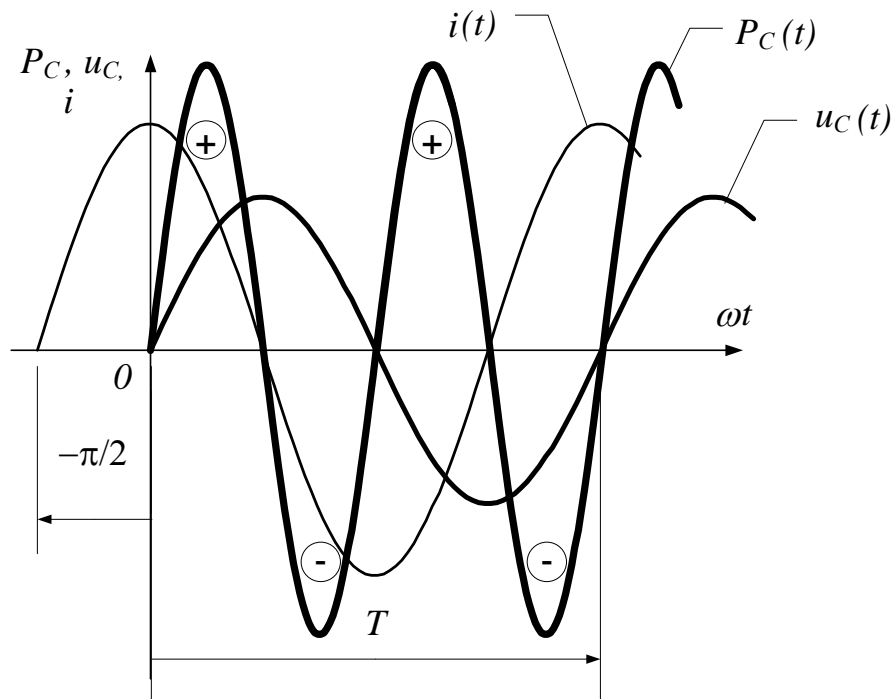


Рисунок 3.13 - График мгновенной мощности на емкостном элементе

Анализируя выражения (3.18), видим, что мгновенная мощность изменяется по синусоидальному закону с удвоенной частотой по сравнению с частотой тока и напряжения.

Сравнивая векторные диаграммы и графика колебаний мгновенных значений токов и напряжений на емкостном и индуктивном элементах, убеждаемся в противоположном действии на цепь емкости и индуктивности. Указанное свойство объясняет поведение электрических цепей в резонансных режимах.

3 Последовательное соединение активного, индуктивного и емкостного элементов (цепь R, L, C)

Рассмотрим задачу расчета цепи, в которую входят последовательно соединенные все основные пассивные элементы (рисунок 3.14).

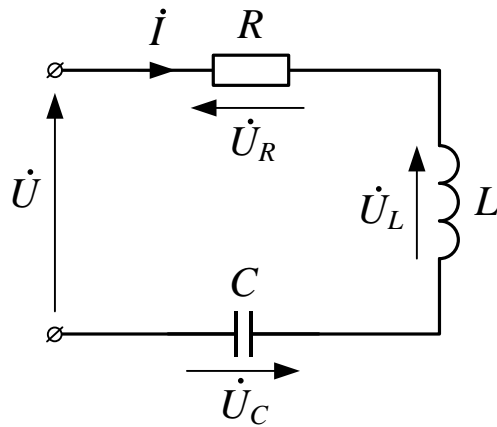


Рисунок 3.14 - Полная цепь переменного тока

Пусть требуется определить напряжения на элементах R, L, C, построить векторную диаграмму и найти ток, если заданы параметры цепи, угловая частота и общее входное напряжение цепи. Построить треугольник сопротивлений данной цепи и треугольник мощности.

Для построения векторной диаграммы произведем векторное сложение напряжений на всех элементах цепи

$$\dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{U} \quad (3.19)$$

Это выражение является **вторым законом Кирхгофа в векторной форме**.

Построение диаграмм начинают с величины общей всех элементов цепи - с вектора тока \dot{I} .

Вектор напряжения на активном сопротивлении совпадает по направлению с вектором тока, его называют **активной составляющей напряжения**, его величина равна:

$$|\dot{U}_R| = U_R = R \cdot I \quad (3.20)$$

Вектор напряжения на катушке \dot{U}_L опережает ток на угол 90° , его величина равна:

$$|\dot{U}_L| = U_L = \omega L \cdot I = x_L \cdot I \quad (3.21)$$

Вектор напряжения на конденсаторе отстает от тока на угол 90° , его величина равна:

$$|\dot{U}_C| = U_C = \frac{1}{\omega C} \cdot I = x_C \cdot I \quad (3.22)$$

Векторная диаграмма при $U_L > U_C$

Треугольник напряжений

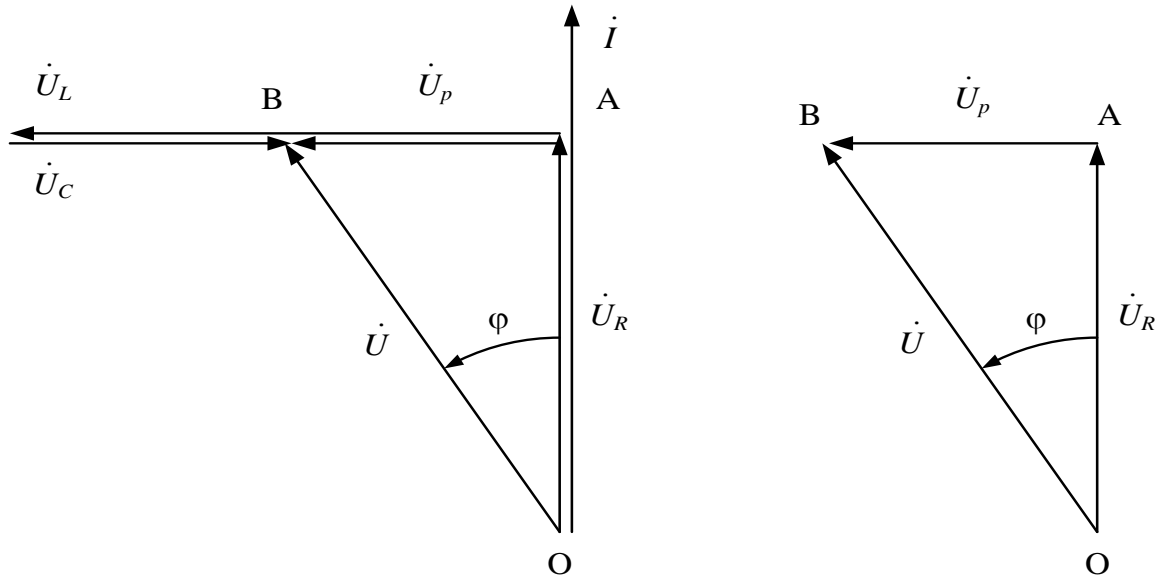


Рисунок 3.15 - Векторные диаграммы цепи RLC и треугольник напряжений
Замыкающий вектор, согласно (3.14), дает приложенное к цепи напряжение U , оно сдвинуто по фазе относительно тока на угол φ .

При построении диаграммы условно принято, что $U_L > U_C$. Такие цепи называются цепями с **индуктивным режимом работы**. Выделим на векторной диаграмме треугольник OAB, этот треугольник изображен отдельно и называется **треугольником напряжений**.

Вектор AB называется **реактивной составляющей напряжения**

$$\dot{U}_P = \dot{U}_L + \dot{U}_C \text{ или } U_P = U_L - U_C$$

Из треугольника напряжений получим:

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_P^2}; \quad U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}. \quad (3.23)$$

Для определения тока воспользуемся соотношениями (3.20), (3.21), (3.22) и подставим их в (3.23), тогда имеем

$$U = \sqrt{R^2 I^2 + \left(\omega L \cdot I - \frac{1}{\omega C} \cdot I \right)^2}, \text{ отсюда}$$

$$\boxed{I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}} \text{ или } \boxed{I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}}} \quad (3.24)$$

Выражение (3.24) носит название **закона Ома для полной цепи R, L, C**.

Если все стороны треугольника напряжений ОАВ разделить на ток, получим **треугольник сопротивлений**. Гипотенуза этого треугольника соответствует **полному сопротивлению цепи - Z**.

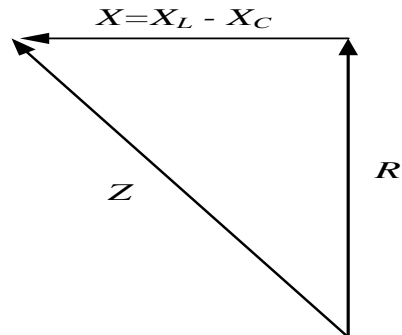


Рисунок 3.16 - Треугольник сопротивлений

Разность индуктивного и емкостного сопротивлений называется **полным реактивным сопротивлением**

$$X = x_L - x_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} . \quad (3.25)$$

Из треугольника сопротивлений получаем соотношение

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}} , \quad (3.26)$$

$$R = Z \cdot \cos \varphi ; X = Z \cdot \sin \varphi . \quad (3.27)$$

С учетом (3.25) и (3.26) **закон Ома** примет вид

$$\boxed{I = \frac{U}{Z}} . \quad (3.28)$$

Умножая все стороны треугольника напряжений на ток цепи, получим **треугольник мощности**.

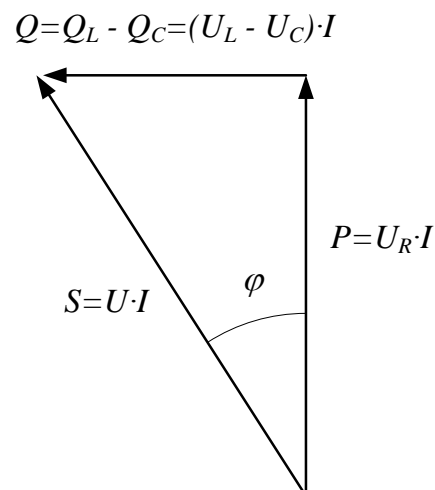


Рисунок 3.17 - Треугольник мощности

Разность реактивной индуктивной мощности и реактивной емкостной мощности называется **реактивной мощностью**, которая обозначается - Q. Эта мощность характеризует часть энергии, непрерывно циркулирующей в цепи и не совершающей полезной работы.

На рисунке 3.17:

P - активная мощность, связанная с активными элементами, полностью преобразуемая в полезную работу;

S - полная или кажущаяся мощность цепи.

Из треугольника мощностей получим важные зависимости:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2}, \quad (3.29)$$

где

$$\begin{aligned} P &= S \cdot \cos \varphi = U \cdot I \cos \varphi, \\ Q &= S \cdot \sin \varphi = U \cdot I \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Отношение активной мощности к полной, называется **коэффициентом мощности**

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}. \quad (3.31)$$

Коэффициент мощности зависит от соотношения активного и реактивных сопротивлений.

Задача № 5

Определить ток в цепи (рисунок 3.14) и напряжение на всех ее элементах, если $R = 8 \text{ Ом}$, $L = 0,016 \text{ Гн}$, $C = 100 \text{ мкФ}$, $U = 100 \text{ В}$, $\omega = 1000 \text{ сек}^{-1}$.

Построить векторную диаграмму.

Решение

1. Определяем сопротивления элементов цепи:

индуктивное - $x_L = 2\pi fL = \omega L = 1000 \cdot 0,016 = 16 \text{ Ом}$,

$$\text{емкостное - } x_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{1000 \cdot 100} = 10 \text{ Ом}, \quad (3.32)$$

полное сопротивление –

$$Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{8^2 + (16 - 10)^2} = 10 \text{ Ом.}$$

2. Ток в цепи определяем по закону Ома для полной цепи переменного тока,

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}} = \frac{100}{10} = 10 \text{ А.} \quad (3.33)$$

3. Напряжения на отдельных элементах цепи находим следующим образом:

$$\begin{aligned} U_R &= R \cdot I = 8 \cdot 10 = 80 \text{ В,} \\ U_L &= x_L \cdot I = 16 \cdot 10 = 160 \text{ В,} \\ U_C &= x_C \cdot I = 10 \cdot 10 = 100 \text{ В.} \end{aligned} \quad (3.34)$$

3. Векторная диаграмма имеет вид, показанный на рисунке 3.15.

4 Параллельное соединение активного, индуктивного и емкостного элементов

В цепи с параллельным соединением основных пассивных элементов (рисунок 3.18) известно входное напряжение U и токи ветвей.

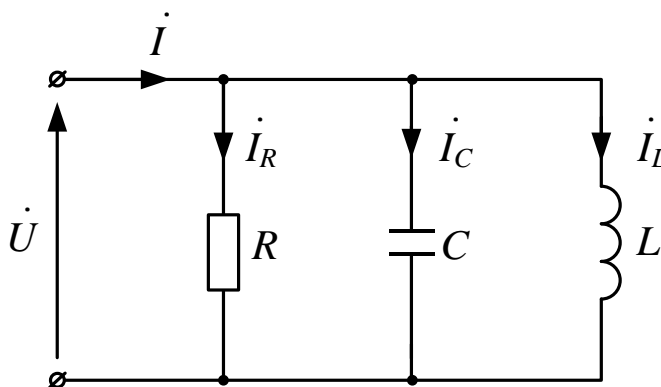


Рисунок 3.18 - Цепь с параллельным соединением элементов R, L, C .

Определить общий ток, построить векторную диаграмму, найти проводимости.

Для построения векторной диаграммы цепи воспользуемся уравнением первого закона Кирхгофа в векторной форме

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C \quad (3.35)$$

Начинаем построение с вектора \dot{U} , величина которого является общей для всех элементов цепи. Вектор активного тока \dot{I}_R строим совпадающим по фазе с напряжением, \dot{I}_L - строим отстающим от него на угол 90° , а \dot{I}_C - опережающим его на угол 90° .

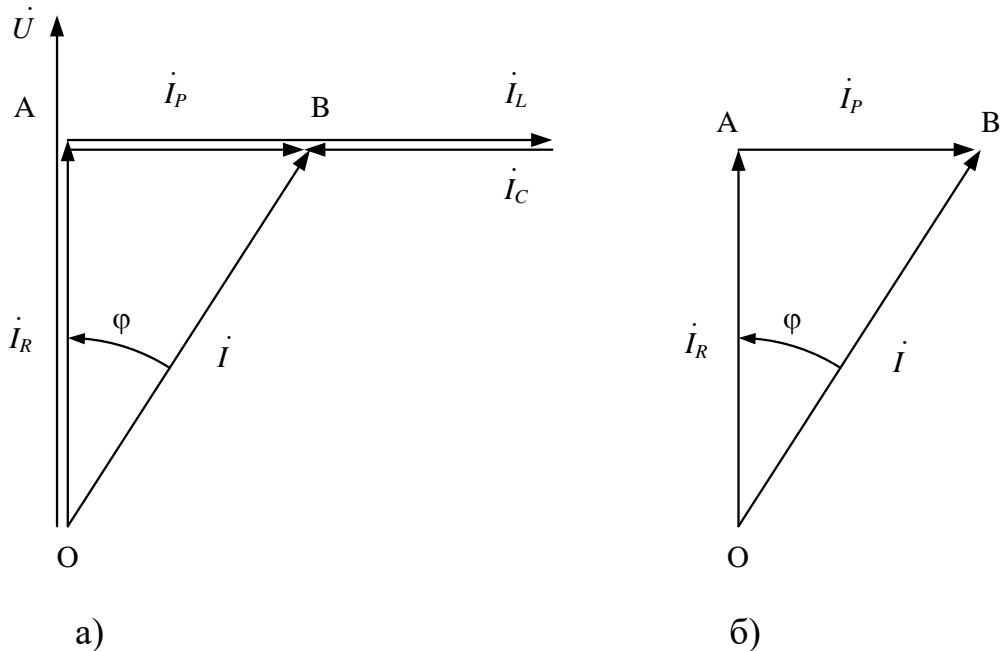


Рисунок 3.19 - Векторная диаграмма цепи с параллельным соединением R, L, C (а) и треугольник тока для случая $I_L > I_C$ (б).

Выделим из векторной диаграммы треугольник АОВ, называемый **треугольником токов**.

Вектор АВ называется реактивной составляющей общего тока

$$\dot{I}_P = \dot{I}_L + \dot{I}_C \text{ или } I_P = I_L + I_C$$

Из треугольника токов получаем соотношение, определяющее общий ток (ток в неразветвленной части цепи) по его составляющим

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_P^2} = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}. \quad (3.36)$$

Отсюда же получим и выражения для определения составляющих тока и угла между ними, часто используемые в расчетной практике:

$$I_R = I \cdot \cos \varphi; \quad I_X = I \cdot \sin \varphi; \quad \varphi = \arctg \frac{I_X}{I_R}. \quad (3.37)$$

Разделив все стороны треугольника токов на напряжение, получим подобный ему треугольник проводимостей (рисунок 3.20).

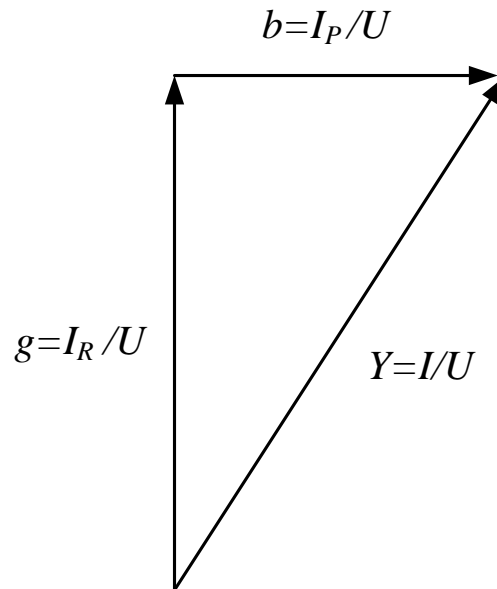


Рисунок 3.20 - Треугольник проводимостей

В этом треугольнике: g - **активная проводимость**, b - **реактивная проводимость**,

причем, $b = b_L - b_C = \frac{I_L}{U} - \frac{I_C}{U}$.

Полная проводимость цепи - Y , определяется из треугольника следующим путем

$$Y = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2}, \quad (3.38)$$

где

$$b = Y \cdot \cos \varphi; \quad b = Y \cdot \sin \varphi. \quad (3.39)$$

Задача № 6

В цепь переменного синусоидального тока с напряжением $U = 200$ В и частотой $f = 50$ Гц включены три параллельных ветви (рисунок 3.18). Параметры включенных элементов известны: $R = 50$ Ом, $C = 33$ мкФ, $L = 0,133$ Гн. Определить все токи построить векторную диаграмму.

Решение

1. Определяем сопротивления реактивных элементов:

$$x_L = 2\pi fL = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,133 = 40 \text{ Ом},$$

$$x_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{10^6}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 33} = 100 \text{ Ом.} \quad (3.40)$$

2. Токи в параллельных ветвях согласно закону Ома будут равны:

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{200}{50} = 4 \text{ А};$$

$$I_L = \frac{U}{x_L} = \frac{200}{40} = 5 \text{ А}; \quad (3.41)$$

$$I_C = \frac{U}{x_C} = \frac{200}{100} = 2 \text{ А.}$$

3. В масштабе строим векторную диаграмму напряжения и токов в порядке, описанном выше, ее общий вид показан на рисунке 3.19.

4. Общий ток найдем по выражению (3.36)

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{4^2 + (5 - 2)^2} = 5 \text{ А} \quad (3.42)$$

5 Электрические резонансы

Под резонансным режимом работы цепи, содержащей индуктивности и емкости, понимают режим, при котором в результате компенсирующего действия L и C цепь в целом носит чисто активный характер. Поэтому напряжение и ток на входе цепи совпадают по фазе и реактивная мощность равна нулю.

В схеме последовательного соединения катушки и конденсатора наблюдается **резонанс напряжений**, а в схеме параллельного их соединения - **резонанс токов**.

3.5.1 Резонанс напряжений

Рассмотрим цепь, в которой установился режим резонанса напряжений (рисунок 3.21).

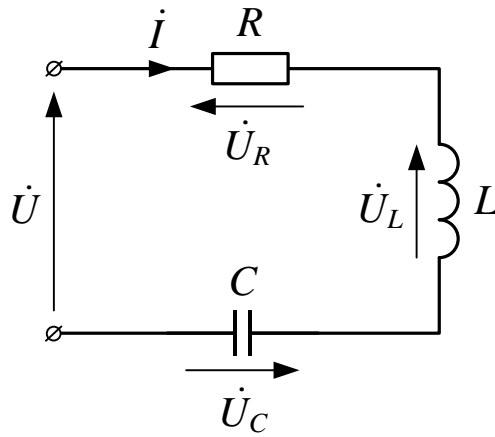


Рисунок 3.21 - Схема цепи с резонансом напряжений

Пусть известны параметры цепи R , L , C и угловая частота резонанса ω_0 . Найдем результирующее сопротивление цепи, ток, напряжения на элементах, коэффициент мощности и резонансный коэффициент (добротность цепи). Построим векторную диаграмму.

Условием резонанса напряжений является равенство индуктивного и емкостного сопротивлений

$$x_L = x_C \quad \text{или} \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (3.43)$$

При выполнении этого условия реактивное сопротивление цепи станет равным нулю $X = x_L - x_C = 0$, а полное сопротивление примет минимальное значение равное

$$Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} = R \Rightarrow \min . \quad (3.44)$$

Ток цепи достигается максимального значения

$$\boxed{I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R} \Rightarrow \max .} \quad (3.45)$$

Напряжение на индуктивности и емкости будут равны (из условия (3.43))

$$\begin{aligned} U_L &= \omega_0 L \cdot I = x_L \cdot I \\ U_C &= \frac{1}{\omega_0 C} \cdot I = x_C \cdot I \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\boxed{U_L = U_C} .$$

Поэтому результирующее напряжение станет равным активному напряжению

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = U_R, \quad \boxed{U = U_R}. \quad (3.47)$$

В соответствии с выражениями (3.46) и (3.47) векторная диаграмма примет вид, показанный на рисунок 3.22.

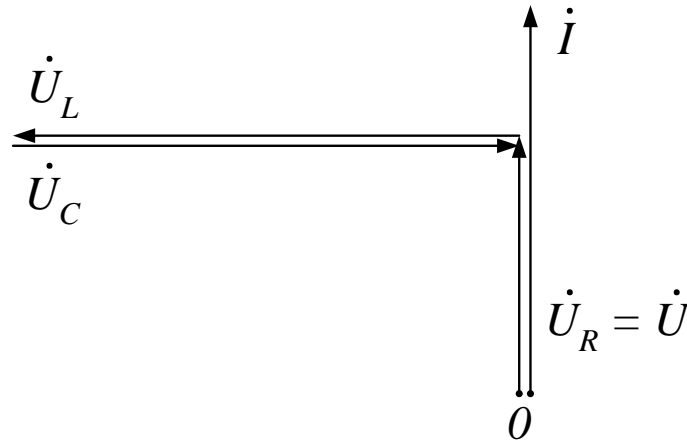


Рисунок 3.22 - Векторная диаграмма резонанса напряжений
Коэффициент мощности при резонансе равен единице

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2}} = 1$$

так, как реактивные мощности $Q_L \approx Q_C$ полностью компенсирует друг друга, то есть

$$\cos \varphi = 1 \Rightarrow \max. \quad (3.48)$$

Резонансный коэффициент (добротность) определяется отношением

$$\frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{x_L}{R} = \frac{x_C}{R}. \quad (3.49)$$

При $x_L = x_C \gg R$ напряжения на индуктивности и емкости окажутся значительно большими, чем приложенное к цепи напряжение

$$\boxed{U_L = U_C \gg U}. \quad (3.50)$$

Задача № 7

В цепи с последовательным соединением катушки и конденсатора (рисунок 3.23) по показаниям приборов ток $I = 2$ А, напряжение на зажимах

цепи $U = 20$ В, напряжение на зажимах конденсатора $U_C = 100$ В. В цепи имеет место режим резонанса на частоте 50 Гц.

Определить: емкость конденсатора C ; активное сопротивление катушки R и ее индуктивность L ; напряжение на зажимах катушки U_K . Построить векторную диаграмму.

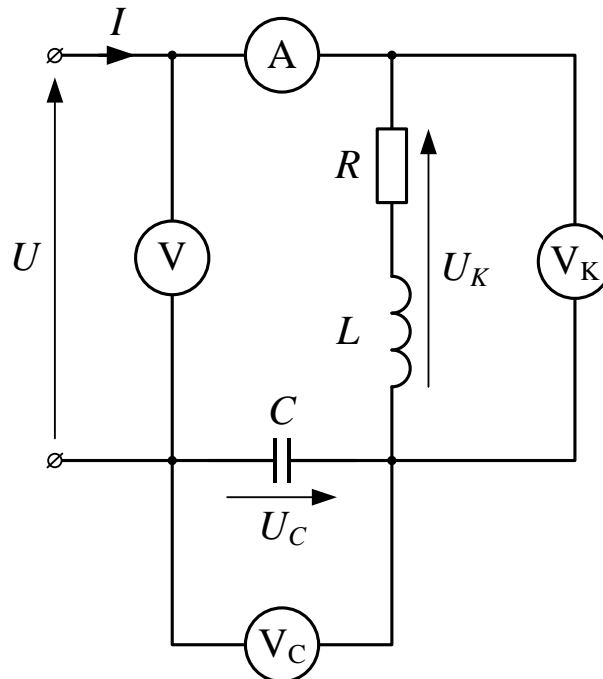


Рисунок 3.23 - Последовательная резонансная цепь

Решение

1. Определим реактивное сопротивление элементов цепи из условия резонанса напряжений

$$x_L = x_C = \frac{U_C}{I} = \frac{V_C}{I} = \frac{100}{2} = 50 \text{ Ом} \quad (3.51)$$

2. Тогда емкость конденсатора и индуктивность катушки:

$$C = \frac{1}{\omega_0 x_C} = \frac{1}{2\pi f x_C} = \frac{10^6}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 50} = 67 \text{ мкФ};$$

$$L = \frac{x_L}{\omega_0} = \frac{x_L}{2\pi f} = \frac{50}{2 \cdot 3,14 \cdot 50} = 0,16 \text{ Гн}. \quad (3.52)$$

3. Определяем полное сопротивление цепи, равное при резонансе активному сопротивлению катушки:

$$Z = \frac{V}{A} = \frac{20}{2} = 10 \text{ Ом};$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} = R_K = 10 \text{ Ом.} \quad (3.53)$$

4 Определим напряжение на зажимах катушки:

$$U_K = Z_K I, \text{ где } Z_K = \sqrt{R_K^2 + x_K^2} = \sqrt{10^2 + 50^2} = 51 \text{ Ом, откуда}$$

$$U_K = Z_K I = 51 \cdot 2 = 102 \text{ В.} \quad (3.54)$$

Реактивная составляющая напряжения на катушке равна

$$U_L = U_C = 100 \text{ В.}$$

Активная составляющая напряжения на катушке равна

$$U_R = U = \sqrt{U_K^2 - U_L^2} = \sqrt{102^2 - 100^2} = 20 \quad (3.55)$$

5. Для построения векторной диаграммы выбираем масштабы:

$$m_i = 0,05 \text{ А/мм, } m_u = 1,0 \text{ В/мм.}$$

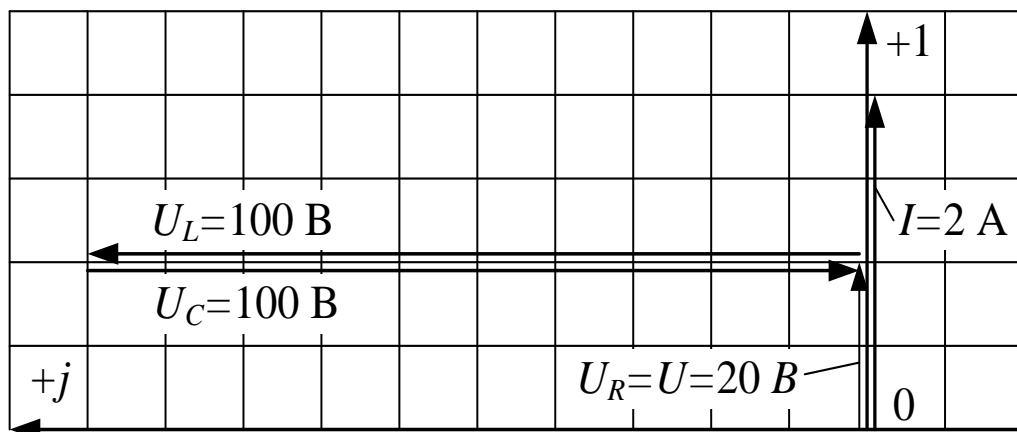


Рисунок 3.24 - Векторная диаграмма

3.5.2 Резонанс токов

Рассмотрим цепь, в которой установился режим резонанса токов (рисунок 3.25). Пусть известны проводимости цепи g , b_L , b_C и напряжение на ее входе U . Найдем результирующую проводимость цепи, токи в ветвях, коэффициент мощности. Построим векторную диаграмму.

Условием резонанса токов является равенство реактивных проводимостей катушки и конденсатора, поэтому общая реактивная проводимость цепи равна нулю $b = b_L - b_C = 0$, а полная проводимость равна активной проводимости

$$Y = \sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2} = g \Rightarrow \min . \quad (3.56)$$

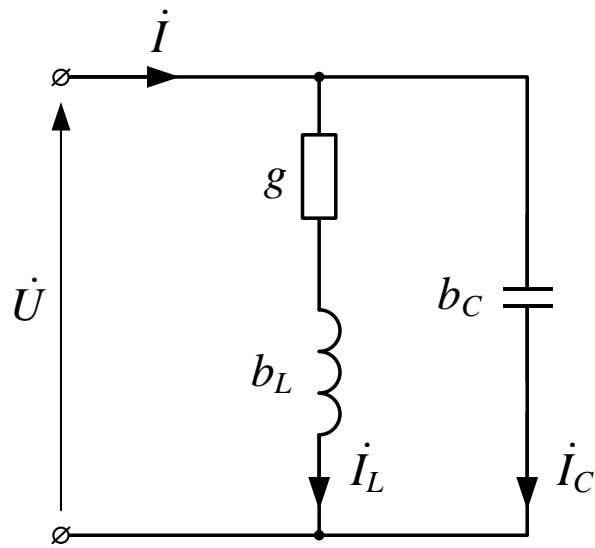


Рисунок 3.25 - Схема цепи с резонансом токов

Ток в неразветвленной части цепи будет тоже минимальным и носить чисто активный характер

$$I = YU = gU = I_R \Rightarrow \min . \quad (3.57)$$

Реактивные составляющие токов в ветвях I_L и I_C равны, так как равны реактивные проводимости b_L , b_C и могут быть значительно больше общего тока:

$$\boxed{\begin{aligned} I_L = b_L U, \quad b_L = b_C \gg g, \\ I_C = b_C U, \quad I_L = I_C \gg I. \end{aligned}} \quad (3.58)$$

Ток катушки I_K определится на векторной диаграмме (рисунок 3.26) геометрической суммой активной I_R и реактивной I_C составляющих токов или аналитически:

$$I_K = Y_K U = \sqrt{g^2 + b_L^2} \cdot U, \quad (3.59)$$

где Y_K - проводимость ветви с катушкой.

Коэффициент мощности найдем здесь через токи

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{I_R}{I} = 1 \Rightarrow \max .} \quad (3.60)$$

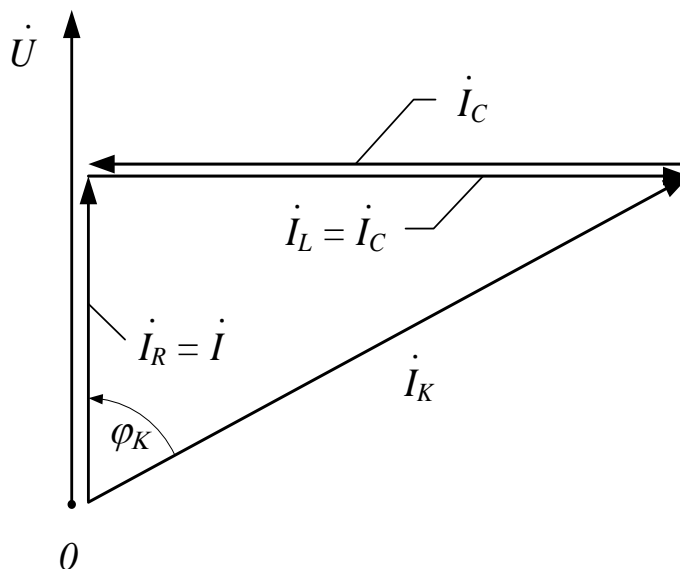


Рисунок 3.26 - Векторная диаграмма резонанса токов

Задача № 8

К зажимам цепи (рисунок 3.27) подведено синусоидальное напряжение величиной $U = 30$ В и частотой $f = 50$ Гц.

Какой величины емкость необходимо подключить параллельно катушке, параметры которой $R = 3$ Ом и $L = 0,0135$ Гн, чтобы в цепи наступил резонанс?

Определить все токи и построить векторную диаграмму для данного режима.

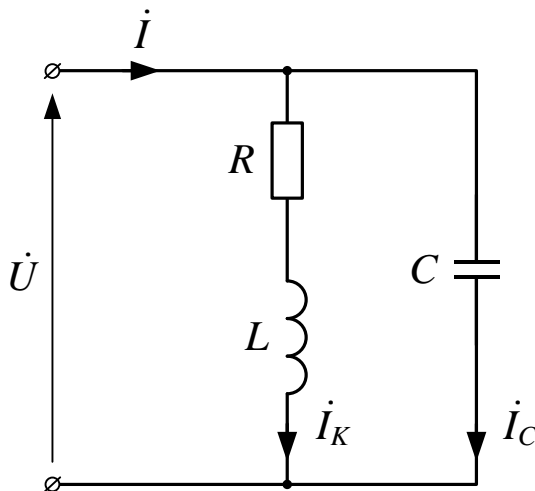


Рисунок 3.27 - Цепь с параллельным соединением L и C

Решение

1. Определяем индуктивное и полное сопротивление катушки

$$x_L = \omega L = 2\pi fL = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,0135 = 4 \text{ Ом},$$

$$Z_K = \sqrt{R^2 + x_L^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ Ом}. \quad (3.61)$$

2. Тогда ток в катушке

$$I_K = \frac{U}{Z_K} = \frac{30}{5} = 6 \text{ А}. \quad (3.62)$$

Активная и реактивная составляющие этого тока будут равны:

$$I_R = I_K \cdot \cos \varphi_K = 6 \cdot 0,6 = 3,6 \text{ А},$$

$$I_L = I_K \cdot \sin \varphi_K = 6 \cdot 0,8 = 4,8 \text{ А}, \quad (3.63)$$

где

$$\cos \varphi_K = \frac{R}{Z_K} = \frac{3}{5} = 0,6, \quad \sin \varphi_K = \frac{x_L}{Z_K} = \frac{4}{5} = 0,8$$

3. Из условия резонанса имеем

$$b_L = b_C = \frac{x_L}{Z_K^2} = \frac{4}{5^2} = \frac{4}{25} = 0,16 \text{ См}.$$

Определим емкостное сопротивление

$$x_C = \frac{1}{b_C} = \frac{1}{0,16} = 6,25 \text{ Ом}. \quad (3.64)$$

4 Емкость и ток, проходящий через конденсатор

$$C = \frac{10^6}{\omega x_C} = \frac{10^6}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 6,25} = 500 \text{ мкФ}, \quad I_C = \frac{U}{x_C} = \frac{30}{6,25} = 4,8 \text{ А}. \quad (3.65)$$

5. Векторную диаграмму строим в масштабах: $m_i = 1,0 \text{ А/мм}$, $m_u = 6,0$

В/мм.

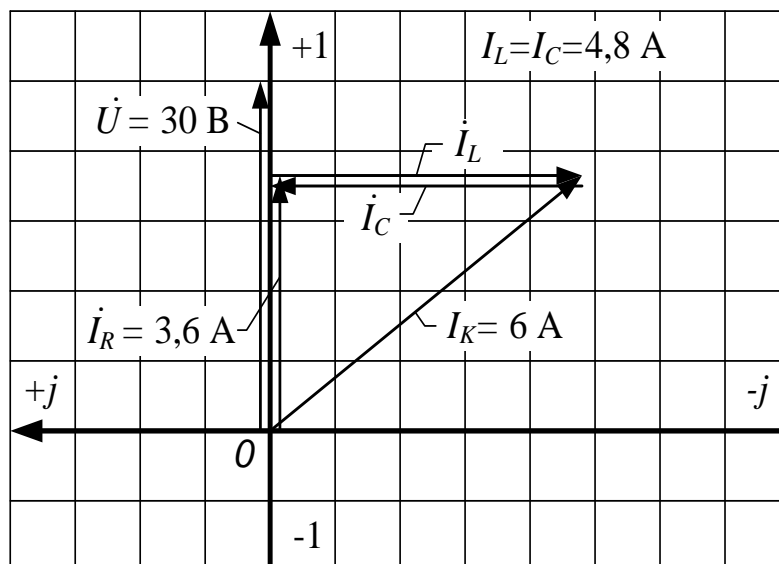


Рисунок 3.28 - Векторная диаграмма для параллельного соединения L и C

6 Расчет цепей синусоидального переменного тока символическим методом

Все методы расчета, разработанные для цепей постоянного тока, пригодны и для цепей синусоидального тока, но при этом необходимо оперировать комплексными значениями электрических величин, т.е. вести расчет символическим методом.

Рассмотрим пример расчета электрической цепи при помощи комплексных чисел.

Задача № 9

Дана схема, представленная на рисунке 3.29. Параметры ее следующие: $E=220$ В; $f=50$ Гц; $C_1=637$ мкФ; $C_2=300$ мкФ; $L_3=15,9$ мГн; $R_1=2$ Ом; $R_2=3$ Ом; $R_3=4$ Ом; $R_v=\infty$; $R_a=0$; (R_v и R_a – внутренние сопротивления вольтметра и амперметра, соответственно).

Найти:

- 1 Все токи.
- 2 Проверить токи на баланс токов.
- 3 Проверить токи на баланс мощности;
- 4 Все напряжения на элементах цепи.
- 5 Проверить напряжения на баланс напряжений.

6 Показания вольтметра и амперметра.

7 Построить топографическую диаграмму цепи.

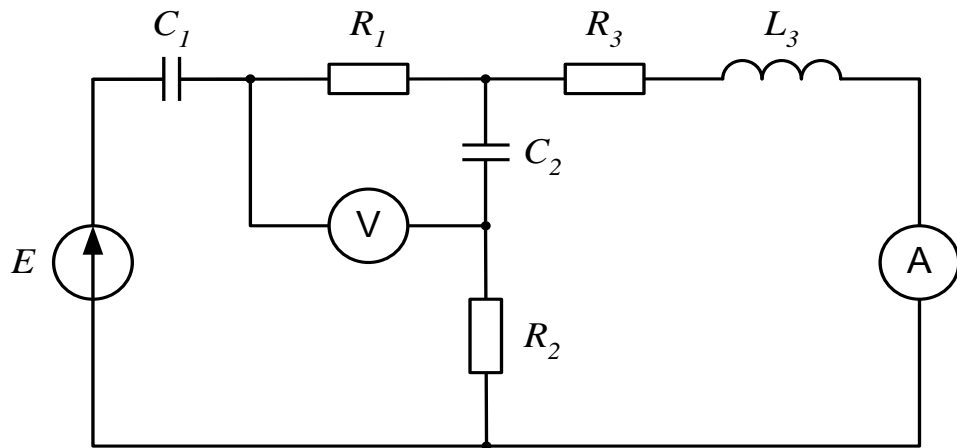


Рисунок 3.29 - Исходная схема

Решение

Расчет будем вести методом линейных преобразований, рассмотренным ранее на примере цепи постоянного тока (раздел 3.3). Метод основан, на свертывании сложной цепи с помощью формул последовательного, параллельного, смешанного соединений, а также перехода от треугольника к звезде сопротивлений. Полученное решение последовательно разворачивается до заданной цепи.

Данный способ возможен, когда все ветви цепи пассивны и в цепи имеется лишь один источник энергии.

1. Определяем реактивные сопротивления участков цепи

$$x_{C1} = \frac{10^6}{2\pi f C_1} = \frac{10^6}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 637} = 5 \text{ Ом},$$

$$x_{C2} = \frac{10^6}{2\pi f C_2} = \frac{10^6}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 300} \approx 11 \text{ Ом}, \quad (3.66)$$

$$x_{L3} = 2\pi f L_3 = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 15,9 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ Ом}.$$

2. Определяем полные сопротивления ветвей цепи по выражению

$$\underline{Z} = R + j(x_L - x_C)$$

Согласно рисунку 3.30, имеем,

$$\underline{Z}_1 = R_1 - jx_{C1} = (2 - j5) \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - jx_{C2} = (3 - j11) \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + jx_{L3} = (4 + j5) \text{ Ом}. \quad (3.67)$$

3. Составляем расчетную схему

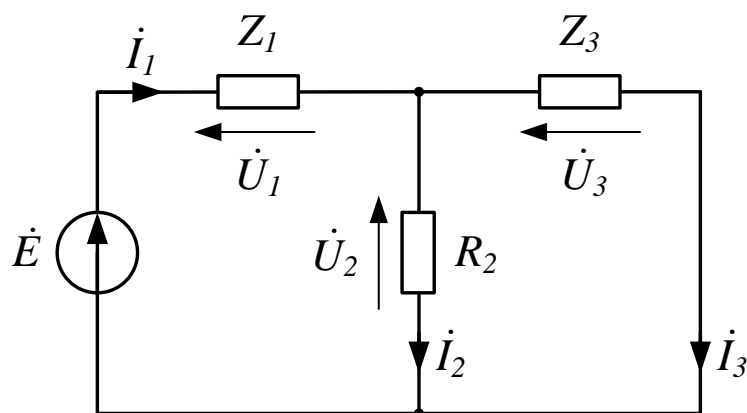


Рисунок 3.30 - Расчетная схема

Из расчетной схемы исключен вольтметр, его сопротивление равно бесконечности, и амперметр, его сопротивление равно нулю.

4 Определяем эквивалентное сопротивление цепи

По схеме (рисунок 3.30) найдем ее входное эквивалентное сопротивление относительно входных зажимов цепи

$$\underline{Z}_{ЭКВ} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \quad (3.68)$$

Составляющие выражения (3.68) находим так;

$$\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 = (R_2 - jx_{C2})(R_3 + jx_{L3}) = (3 - j11)(4 + j5) =$$

$$= 12 - j44 + j15 + 55 = (67 - j29);$$

$$\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = (R_2 - jx_{C2}) + (R_3 + jx_{L3}) = (7 - j6);$$

подставляя в (3.68), получаем

$$\frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{(67 - j29)}{(7 - j6)} = \frac{(67 - j29)(7 + j6)}{(7 - j6)(7 + j6)} = \frac{643 + j199}{85} = (7,56 + j2,34)$$

Окончательно имеем

$$\underline{Z}_{ЭКВ} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = (2 - j5) + (7,56 + j2,3), \quad (3.69)$$

$$\underline{Z}_{ЭКВ} = (9,56 + j2,66) \text{ Ом}.$$

5. Размечаем условно-положительные направления токов и напряжений

На схеме (рисунке 3.30) размечаем стрелки токов в комплексной форме. Стрелки комплексных напряжений размечаем против стрелок токов.

6. Определяем ток \dot{I}_1

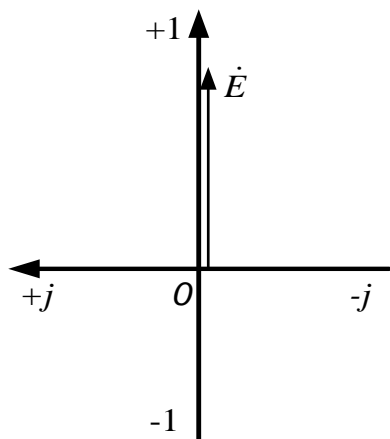


Рисунок 3.31 – К определению напряжений

Определяем ток в первой ветви \dot{I}_1 .

Выражаем заданную ЭДС \dot{E} в комплексной форме. Если не задана начальная фаза ЭДС, ее можно принять равной нулю и располагать вектор ЭДС, совпадающим с положительным направлением действительной оси комплексной плоскости.

В этом случае мнимая составляющая комплексного числа будет отсутствовать (рисунке 3.31) и входная ЭДС может быть записано в форме:

ЭДС может быть записано в форме:

$$\dot{E} = 220 + j0 = 220 \text{ В}$$

По закону Ома получаем:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{E}{Z_{ЭКВ}} = \frac{220}{9,56 - j2,66} = \frac{220(9,56 + j2,66)}{(9,56 - j2,66)(9,56 + j2,66)} = \\ &= \frac{2103,2 + j585,2}{9,56^2 + 2,66^2} = (21,36 + j5,94) \text{ А} \end{aligned} \quad (3.70)$$

7. Проверяем найденный ток \dot{I}_1 на баланс мощности

$$\underline{S}_T = E \cdot \hat{I}_1 = 220(21,36 - j5,94) = (4699,2 - j1306,8) \text{ ВА},$$

где \hat{I}_1 - сопряженное комплексное значение тока \dot{I}_1 .

Нагрузка цепи потребляет мощность

$$\underline{S}_H = Z_{ЭКВ} \cdot |\dot{I}_1|^2$$

Квадрат модуля тока

$$|\dot{I}_1|^2 = 21,36^2 + 5,94^2 = 491,53$$

$$\underline{S}_H = (9,56 - j2,66) \cdot 491,53 = (4699,03 - j1307,47) \text{ ВА}.$$

Ошибки по балансу мощности не превышают 1% процента, значит ток \dot{I}_1 найден верно.

8. Определяем напряжение \dot{U}_1

Согласно рисунку 3.30, имеем:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \underline{Z}_1 \cdot \dot{I}_1 = (R_1 - jx_1)\dot{I}_1 = (2 - j5)(21,36 + j5,94) = \\ &= (72,42 - j94,92) \text{ В.}\end{aligned}\quad (3.71)$$

9. Определяем напряжения $\dot{U}_2 = \dot{U}_2 = \dot{U}_{23}$

$$\begin{aligned}\dot{U}_{23} &= \underline{Z}_{23} \cdot \dot{I}_1 = (7,56 - j2,34) \cdot (21,36 + j5,94) = 161,48 + j44,92 + \\ &+ j50,00 - 13,9 = (147,58 + j94,92) \text{ В}\end{aligned}\quad (3.72)$$

Проверяем найденные напряжения на баланс напряжений согласно второму закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned}\dot{E} - \dot{U}_1 - \dot{U}_2 &= 0 \\ 220 - (72,42 - j94,92) - (147,58 + j94,92) &= 0\end{aligned}\quad (3.73)$$

Баланс сошелся, значит напряжение \dot{U}_1 и \dot{U}_2 найдены верно.

10. Определяем \dot{I}_2

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{147,58 + j94,92}{3 - j11} = -(4,63 - j14,68) \text{ А}\quad (3.74)$$

Ток получился отрицательным. Это значит, что в действительности ток во второй ветви протекает против направления стрелки и стрелка, была размечена в начале расчета неправильно, но исправлять стрелку не нужно, это приводит обычно к ошибкам в дальнейшем расчете.

11. Определяем ток \dot{I}_3

По закону Ома получаем,

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{147,58 + j94,92}{4 + j5} = (25,29 - j8,74) \text{ А}\quad (3.75)$$

12. Проверяем токи на баланс токов

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 &= (21,36 + j5,94) + (4,63 - j14,68) - \\ &- (25,99 - j8,74) = 0.\end{aligned}\quad (3.76)$$

13. Проверяем токи на баланс мощности

Источник энергии вырабатывает мощность:

$$\underline{S}_G = \dot{E} \cdot \hat{I}_1 = 220(21,36 - j5,94) = (4699,2 - j1306,8) \text{ ВА},$$

где \hat{I}_1 - сопряженное комплексное значение тока.

Нагрузка цепи потребляет мощность -

$$\underline{S}_H = \underline{Z}_1 \cdot I_1^2 + \underline{Z}_2 \cdot I_2^2 + \underline{Z}_3 \cdot I_3^2.$$

Квадраты модулей токов в ветвях:

$$I_1^2 = 21,36^2 + 5,94^2 = 491,53$$

$$I_2^2 = 4,63^2 + 14,68^2 = 236,94$$

$$I_3^2 = 25,99^2 + 8,74^2 = 751,87$$

Составляющие мощности:

$$\underline{Z}_1 \cdot I_1^2 = (2 - j5) \cdot 491,53 = (983,06 - j2457,65),$$

$$\underline{Z}_2 \cdot I_2^2 = (3 - j11) \cdot 236,94 = (710,82 - j2606,34),$$

$$\underline{Z}_3 \cdot I_3^2 = (4 - j5) \cdot 751,87 = (3007,48 + j3759,35). \quad (3.77)$$

Итого: $S_H = (4701,36 - j1304,64) \text{ ВА}$.

Сходимость баланса мощности

$$\begin{aligned} \Delta \underline{S} &= \underline{S}_G - \underline{S}_H = 4699,2 - j1306,8 - 4701,36 + j1304,64 = \\ &= -2,61 - j2,16 \ll 1\% \end{aligned}$$

от величины \underline{S}_G .

Баланс мощности сошелся, токи найдены правильно.

13. Определяем напряжения на элементах цепи

Для этого повторяем схему заданной цепи и размечаем на ней все токи и напряжения. Буквами обозначим узлы схемы и точки, отделяющие элементы цепи друг от друга, начиная с низшего потенциала.

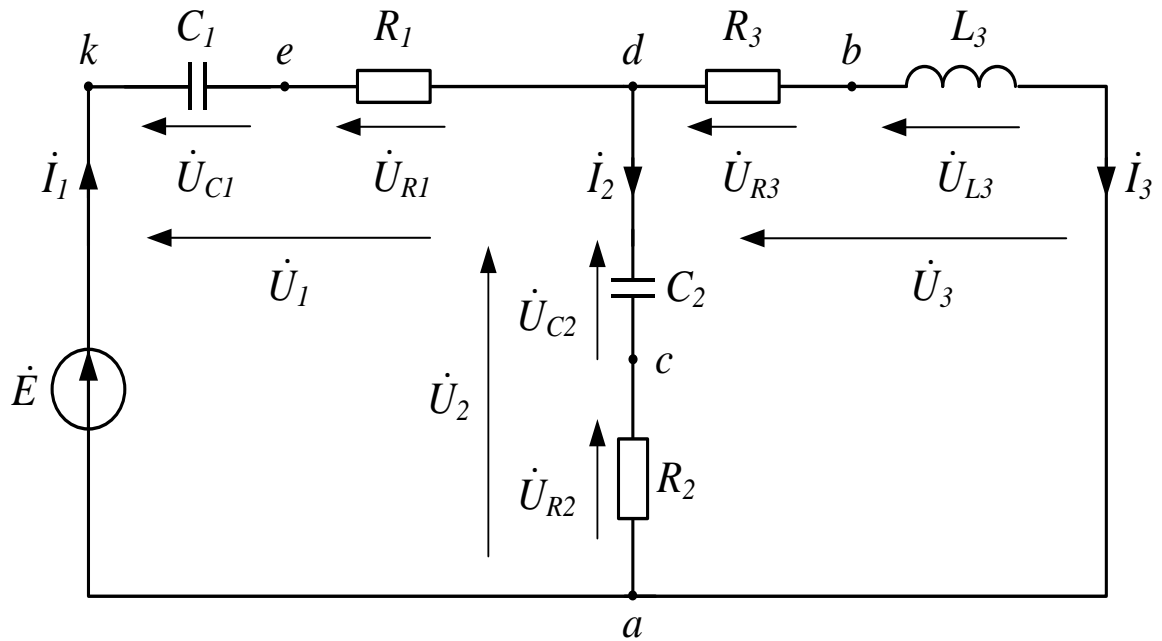


Рисунок 3.32 - Напряжения на элементах цепи

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_{C1} &= -jx_{C1} \cdot \dot{I}_1 = -j5(21,42 + j5,94) = 29,7 - j106,8 \text{ В} \\
 \dot{U}_{R1} &= R_1 \cdot \dot{I}_1 = 2(21,36 + j5,94) = 42,72 + j11,88 \text{ В}, \\
 \dot{U}_{C2} &= -jx_{C2} \cdot \dot{I}_2 = -j11(-4,63 + j14,68) = 161,48 + j50,93 \text{ В}, \quad (3.78) \\
 \dot{U}_{R2} &= R_2 \cdot \dot{I}_2 = 3(-4,63 + j14,68) = -13,89 + j44,04 \text{ В}, \\
 \dot{U}_{R3} &= R_3 \cdot \dot{I}_3 = 4(25,99 - j8,74) = 103,96 - j34,96 \text{ В}, \\
 \dot{U}_{L3} &= jx_{L3} \cdot \dot{I}_3 = j5(25,99 - j8,74) = 43,7 + j129,95 \text{ В}.
 \end{aligned}$$

На основании (3.78) действующие значения напряжений будут равны:

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_{C1} &= \sqrt{29,7^2 + 106,8^2} = 110,9 \text{ В}, \\
 \dot{U}_{R1} &= \sqrt{42,72^2 + 11,88^2} = 44,34 \text{ В}, \\
 \dot{U}_{C2} &= \sqrt{161,48^2 + 50,93^2} = 169,4 \text{ В}, \quad (3.79) \\
 \dot{U}_{R2} &= \sqrt{13,89^2 + 44,04^2} = 46,17 \text{ В}, \\
 \dot{U}_{R3} &= \sqrt{103,96^2 + 34,96^2} = 109,6 \text{ В}, \\
 \dot{U}_{L3} &= \sqrt{43,7^2 + 129,95^2} = 137,1 \text{ В}.
 \end{aligned}$$

15. Производим проверку на баланс напряжений

Проверяем полученные напряжения на баланс напряжений, подставив полученные значения комплексов напряжений на элементах цепи в уравнения, составленные по 2-му закону Кирхгофа.

Первое уравнение:

$$\dot{E} - \dot{U}_{R2} - \dot{U}_{C2} - \dot{U}_{R1} - \dot{U}_{C1} = 0$$

$$220 - (13,89 - j44,09) - (161,48 + j50,93) - (42,72 + j11,88) - (29,7 - j106,88) = 0$$

Второе уравнение:

$$U_{L3} + \dot{U}_{R3} - \dot{U}_{C2} - \dot{U}_{R2} = (43,7 + j129,95) + (103,96 - j34,96) - (3.80)$$

$$- (161,48 + j50,93) - (-13,89 + j44,04) = 0.$$

16. Определяем действующие значения токов

Из выражений (3.77) получим:

$$I_1 = \sqrt{491,53} = 22,16 \text{ A,}$$

$$I_2 = \sqrt{236,94} = 15,39 \text{ A,} \quad (3.81)$$

$$I_3 = \sqrt{751,87} = 27,42 \text{ A,}$$

17. Определяем показания вольтметра

На схеме (рисунок 3.33) изображен участок цепи с включенным вольтметром, из нее имеем:

$$\dot{U}_V - \dot{U}_{R1} - \dot{U}_{C2} = 0,$$

$$\dot{U}_V = \dot{U}_{R1} + \dot{U}_{C2}. \quad (3.82)$$

Подставляем в (3.82) значения (3.78).

$$\dot{U}_V = (42,72 + j11,88) + (161,48 + j50,93) = (204,2 + j62,81) \text{ В} \quad (3.83)$$

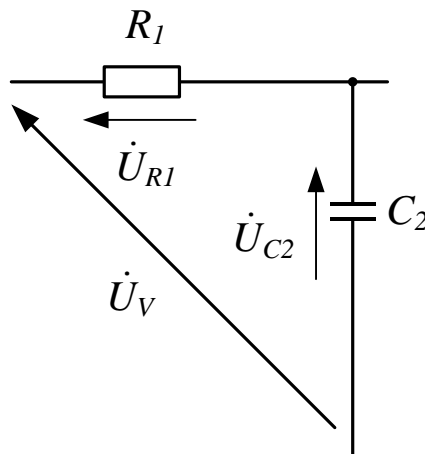


Рисунок 3.33 - Участок цепи (замкнутый контур) с напряжением

Вольтметра \dot{U}_V

Показания вольтметра будут

$$\dot{U}_V = \sqrt{204,2^2 + 62,81^2} = 213,6. \quad (3.84)$$

Результаты расчета приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 - Результаты расчета токов и напряжений

Обозначения	Комплексы	Величины
I_1	$21,36 + j5,94$	22,16 А
I_2	$-4,63 + j14,68$	15,39 А
I_3	$25,99 - j8,74$	27,42 А
U_1	$72,42 - j94,92$	119,2 А
$U_2=U_3$	$147,58 + j94,92$	173,22 В
U_{C1}	$29,7 - j106,8$	110,9 В
U_{R1}	$42,72 + j11,88$	44,34 В
U_{C2}	$161,48 + j50,93$	169,4 В
U_{R2}	$-13,89 + j44,04$	46,17 В
U_{R3}	$103,96 - j34,94$	109,6 В
U_{L3}	$43,7 + j129,95$	137,1 В
\underline{S}_Γ	$4699,2 - j1306,8$	4868,8 ВА
P_Γ		4699,2 Вт
Q_Γ		1306,8 вар

Показания вольтметра $\dot{U}_V = 213,6$ В, показания амперметра $I_3 = 27,42$

А.

18. Строим векторную диаграмму токов (рисунок 3.34)

а) Выбираем масштаб для векторов токов $m_i = 0,5$ А/мм;

б) Наносим комплексные оси: **вертикальная** - ось действительных чисел, **горизонтальная** - ось мнимых чисел;

в) Строим в масштабе, согласно данным таблицы 3.1, векторы токов \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 . Вектор тока \dot{I}_1 на векторной диаграмме должен равняться геометрической сумме векторов токов \dot{I}_2 и \dot{I}_3 , так как $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$ по первому закону Кирхгофа.

19. Строим векторную диаграмму напряжений (рисунок 3.34)

а) Выбираем масштаб для векторов напряжений: $m_i = 2$ В/мм;

б) Строим в масштабе, согласно данным таблицы 3.1, векторы напряжений: \dot{U}_{C1} , \dot{U}_{R1} , \dot{U}_{C2} , \dot{U}_{R2} , \dot{U}_{R3} , \dot{U}_{L3} .

Вектор \dot{U}_{R1} , должен быть параллелен вектору тока \dot{I}_1 , так, как они совпадают по фазе. Вектор \dot{U}_{R2} также должен совпадать по фазе с вектором тока \dot{I}_2 , а \dot{U}_{R3} с вектором тока \dot{I}_3 .

Вектор \dot{U}_{C1} должен быть перпендикулярен к вектору тока \dot{I}_1 , и отставать от него. Вектор тока \dot{I}_2 также опережает вектор напряжения \dot{U}_{C2} на угол равный 90° . Вектор напряжения \dot{U}_{L3} должен быть перпендикулярен к вектору тока, \dot{I}_3 и направлен в сторону опережения от этого тока.

20. Построение топографической диаграммы напряжений

Топографическая векторная диаграмма напряжений строится в следующем порядке (рисунок 3.34):

- а) Наносим комплексные оси: вертикальная - ось действительных чисел; горизонтальная - ось мнимых чисел;
- б) За начало отсчета системы координат на комплексной плоскости принимаем точку самого низкого потенциала, а соответственно схеме на рисунке 3.33.
- в) Строим вектор напряжения \dot{U}_{R2} из точки а, и конец вектора обозначаем точкой с;
- г) Из точки с строим вектор напряжения \dot{U}_{C2} и получаем точку d;
- д) Из конца вектора напряжения \dot{U}_{C2} (точки d) строим вектор напряжения \dot{U}_{R1} и обозначаем, конец этого вектора точкой е;
- е) Из точки О строим вектор \dot{U}_{C1} , конец, которого обозначаем точкой к;
- ж) Точка к должна являться концом вектора э.д.с. \dot{E} , расположенном на действительной оси чисел, так как согласно 2-му закону Кирхгофа,
$$\dot{E} = \dot{U}_{R2} + \dot{U}_{C2} + \dot{U}_{R1} + \dot{U}_{C1}.$$

- з) Строим из точки a вектор \dot{U}_{L3} и из полученной точки в вектор \dot{U}_{L3} , конец, которого должен совпасть с точкой d на диаграмме, так как $\dot{U}_{L3} + \dot{U}_{R3} - \dot{U}_{C2} - \dot{U}_{R2} = 0$ по 2-му закону Кирхгофа;
- и) Соединив точки d и k , получим вектор напряжения \dot{U}_1 т.к. $\dot{U}_1 = \dot{U}_{R1} + \dot{U}_{C1}$.
- к) Соединим точку a на диаграмме с точкой d и получим вектор напряжения $\dot{U}_2 = \dot{U}_3$. Вектор \dot{U}_2 равен геометрической сумме векторов \dot{U}_{R2} и \dot{U}_{C2} так, как $\dot{U}_2 = \dot{U}_{R2} + \dot{U}_{C2}$, по второму закону Кирхгофа. Вектор напряжения \dot{U}_3 равен геометрической сумме векторов \dot{U}_{R3} и \dot{U}_{L3} , так, как $\dot{U}_3 = \dot{U}_{R3} + \dot{U}_{L3}$, согласно 2-му закону Кирхгофа.

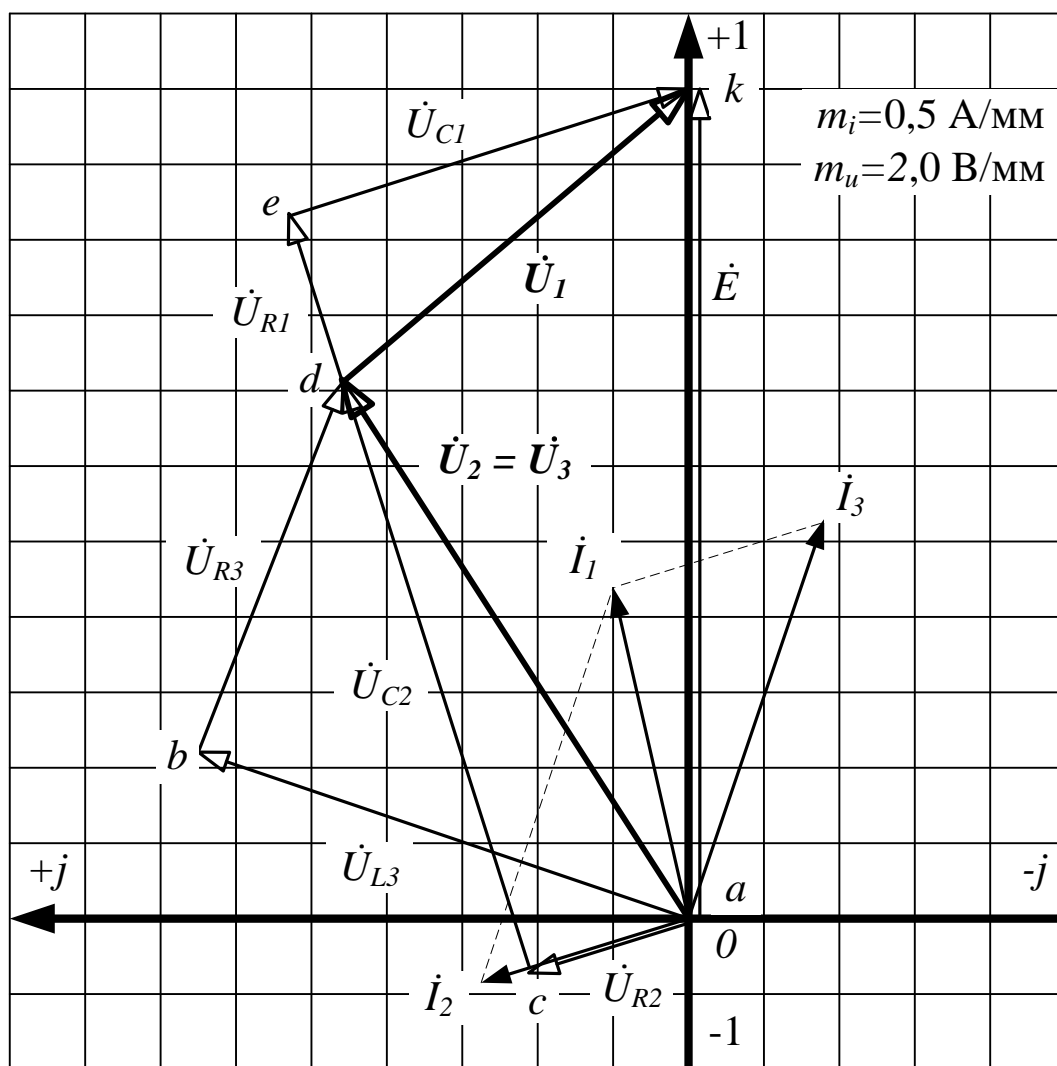


Рисунок 3.34 - Векторная топографическая диаграмма

7 Варианты контрольных заданий для самостоятельного решения

Для электрической схемы, соответствующей номеру варианта (таблица 3.2) и изображенной на рис. 3.35 - 3.55, по заданным параметрам и ЭДС источника энергии выполнить следующие задания:

- 1 Определить токи во всех ветвях.
- 2 Проверить токи на баланс токов.
- 3 Проверить токи на баланс мощности.
- 4 Определить напряжение на элементах и ветвях.
- 5 Построить векторные диаграммы токов и напряжений.
- 6 Построить топографическую векторную диаграмму.

Таблица 3.2 – Задания для самостоятельного решения

Вариант	Номер рисунка	E, В	f, Гц	C ₁ , мкФ	C ₂ , мкФ	C ₃ , мкФ	L ₁ , мГн	L ₂ , мГн	L ₃ , мГн	R ₁ , Ом	R ₂ , Ом	R ₃ , Ом
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	3.35	50	50	-	1000	-	31,8	-	15,9	95	10	2
2	3.35	100	60	-	1000	-	31,8	-	6,37	95	10	2
3	3.35	120	100	-	1000	-	31,8	-	6,37	95	10	2
4	3.35	200	150	-	1000	-	31,8	-	15,9	95	10	2
5	3.35	220	200	-	1000	-	31,8	-	15,9	95	10	2
6	3.36	50	50	-	-	1000	15,9	100	115	10	1	100
7	3.36	100	60	-	-	1000	15,9	100	115	10	1	100
8	3.36	120	100	-	-	1000	15,9	100	115	10	1	100
9	3.36	200	150	-	-	1000	15,9	100	115	10	1	100
10	3.36	220	200	-	-	1000	15,9	100	115	10	1	100
11	3.37	50	50	637	-	-	-	15,9	6,37	5	10	2
12	3.37	100	60	637	-	-	-	15,9	6,37	5	10	2
13	3.37	120	100	637	-	-	-	15,9	6,37	5	10	2

14	3.37	200	150	637	-	-	-	15,9	6,37	5	10	2
15	3.37	220	200	637	-	-	-	15,9	6,37	5	10	2
16	3.38	50	50	637	300	-	-	-	15,9	2	3	
17	3.38	100	60	637	300	-	-	-	15,9	2	3	
18	3.38	120	100	637	300	-	-	-	15,9	2	3	
19	3.38	200	120	637	300	-	-	-	15,9	2	3	
20	3.38	220	200	637	300	-	-	-	15,9	2	3	
21	3.39	50	50	637	159	-	-	-	95	5	10	4
22	3.39	100	60	637	159	-	-	-	95	5	10	4
23	3.39	120	100	637	159	-	-	-	95	5	10	4
24	3.39	200	150	637	159	-	-	-	95	5	10	4
25	3.39	220	200	637	159	-	-	-	95	5	10	4
26	3.40	50	50	650	900	-	20	-	-	2	8	3
27	3.40	100	60	650	900	-	20	-	-	4	7	5
28	3.40	120	100	650	900	-	20	-	-	6	11	12
29	3.40	200	150	650	900	-	20	-	-	3	10	7
30	3.40	220	200	650	900	-	20	-	-	18	11	15
31	3.41	50	50	-	637	-	19,1	-	31,8	10	-	10
32	3.41	100	60	-	637	-	19,1	-	31,8	10	-	10
33	3.41	120	100	-	637	-	19,1	-	31,8	10	-	10
34	3.41	200	150	-	637	-	19,1	-	31,8	10	-	10
35	3.41	220	200	-	637	-	19,1	-	31,8	10	-	10
36	3.42	50	50	-	318	-	15,9	-	15,9	2	10	4
37	3.42	100	60	-	318	-	15,9	-	15,9	2	10	4
38	3.42	200	150	-	318	-	15,9	-	15,9	2	10	4
39	3.42	220	200	-	318	-	15,9	-	15,9	2	10	4
40	3.42	120	100	-	318	-	15,9	-	15,9	2	10	4
41	3.43	50	50	-	318	-	9,55	-	-	4	10	4
42	3.43	100	60	-	318	-	9,55	-	-	4	10	4
43	3.43	120	100	-	318	-	9,55	-	-	4	10	4

44	3.43	200	150	-	318	-	9,55	-	-	4	10	4
45	3.43	220	200	-	318	-	9,55	-	-	4	10	4
46	3.44	50	50	1000	-	-	32	15	-	11	4	-
47	3.44	100	60	1000	-	-	32	15	-	3	9	-
48	3.44	120	100	1000	-	-	32	15	-	8	12	-
49	3.44	200	150	1000	-	-	32	15	-	16	20	-
50	3.44	220	200	1000	-	-	32	15	-	5	14	-
51	3.45	50	50	500	1000	-	30	-	-	7	4	3
52	3.45	100	60	500	1000	-	30	-	-	8	5	2
53	3.45	120	100	500	1000	-	30	-	-	6	7	8
54	3.45	200	150	500	1000	-	30	-	-	5	3	1
55	3.45	220	200	500	1000	-	30	-	-	4	9	3
56	3.46	50	50	600	900	-	25	-	-	2	3	4
57	3.46	100	60	600	900	-	25	-	-	7	5	4
58	3.46	120	100	600	900	-	25	-	-	3	2	8
59	3.46	200	150	600	900	-	25	-	-	10	9	6
60	3.46	220	200	600	900	-	25	-	-	2	11	4
61	3.47	50	50	700	450	800	10	-	-	20	10	-
62	3.47	100	60	700	450	800	10	-	-	17	5	-
63	3.47	120	100	700	450	800	10	-	-	3	11	-
64	3.47	200	150	700	450	800	10	-	-	8	14	-
65	3.47	220	200	700	450	800	10	-	-	21	7	-
66	3.48	50	50	1200	-	-	12	20	-	10	6	-
67	3.48	100	60	1200	-	-	12	20	-	8	3	-
68	3.48	120	100	1200	-	-	12	20	-	4	7	-
69	3.48	200	150	1200	-	-	12	20	-	5	11	-
70	3.48	220	200	1200	-	-	12	20	-	9	7	-
71	3.49	50	50	420	900	-	8	-	-	20	7	-
72	3.49	100	60	420	900	-	8	-	-	15	3	-
73	3.49	120	100	420	900	-	8	-	-	17	8	-

74	3.49	200	150	420	900	-	8	-	-	6	4	-
75	3.49	220	200	420	900	-	8	-	-	5	8	-
76	3.50	50	50	750	-	-	35	18	10	10	5	-
77	3.50	100	60	750	-	-	35	18	10	8	4	-
78	3.50	120	100	750	-	-	35	18	10	3	7	-
79	3.50	200	150	750	-	-	35	18	10	12	6	-
80	3.50	220	200	750	-	-	35	18	10	3	8	-
81	3.51	50	50	-	159	-	15,9	-	31,8	3	20	-
82	3.51	100	60	-	159	-	15,9	-	31,8	3	20	-
83	3.51	120	100	-	159	-	15,9	-	31,8	3	20	-
84	3.51	200	150	-	159	-	15,9	-	31,8	3	20	-
85	3.51	50	50	-	159	-	15,9	-	31,8	5	10	-
86	3.52	50	50	200	-	-	20	30	40	8	-	-
87	3.52	100	60	200	-	-	20	30	40	7	-	-
88	3.52	120	100	200	-	-	20	30	40	10	-	-
89	3.52	200	150	200	-	-	20	30	40	14	-	-
90	3.52	220	200	200	-	-	20	30	40	3	-	-
91	3.53	50	50	159	-	637	25	9	-	6	4	-
92	3.53	100	60	159	-	637	25	9	-	6	4	-
93	3.53	120	100	159	-	637	25	9	-	6	4	-
94	3.53	200	150	159	-	637	25	9	-	6	4	-
95	3.53	220	200	159	-	637	25	9	-	6	4	-
96	3.54	50	50	1100	-	-	8	7	-	5	4	-
97	3.54	100	60	1100	-	-	8	7	-	3	9	-
98	3.54	120	100	1100	-	-	8	7	-	11	15	-
99	3.54	200	150	1100	-	-	8	7	-	6	8	-
100	3.54	220	200	1100	-	-	8	7	-	7	12	-

К заданиям

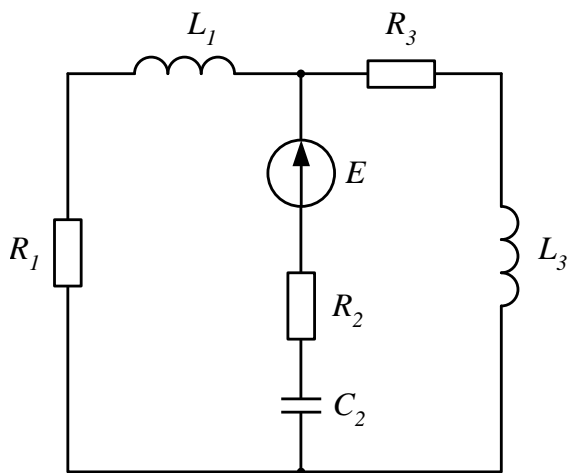


Рисунок 3.35

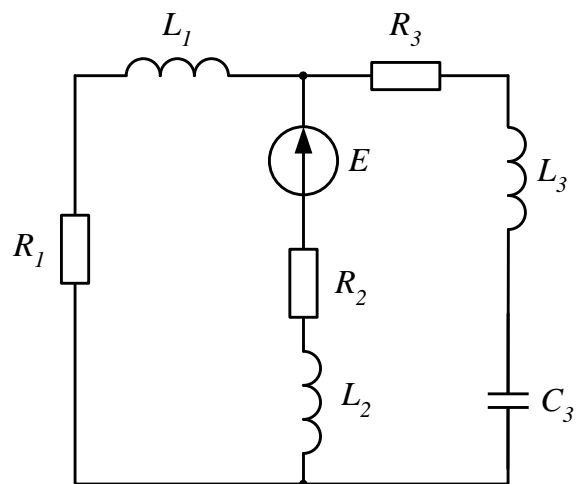


Рисунок 3.36

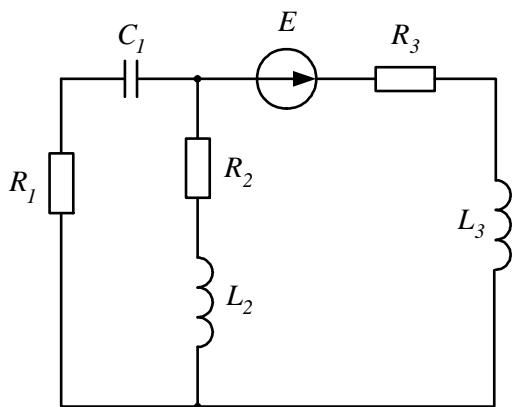


Рисунок 3.37

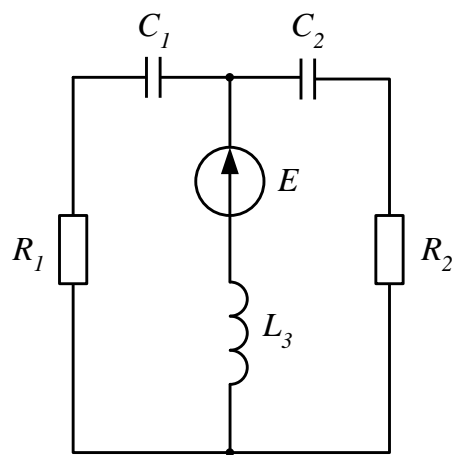


Рисунок 3.38

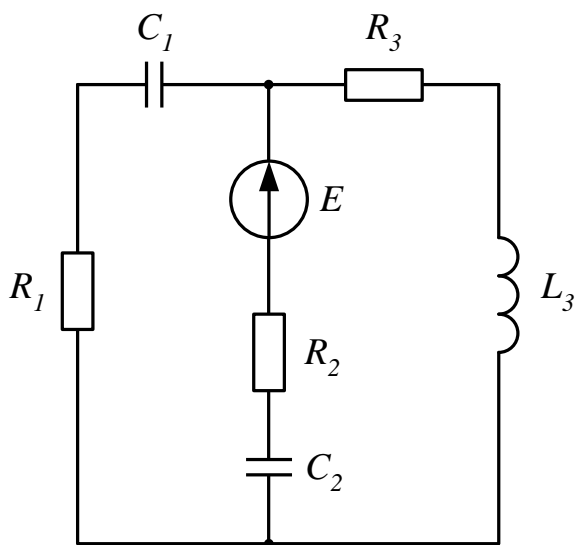


Рисунок 3.39

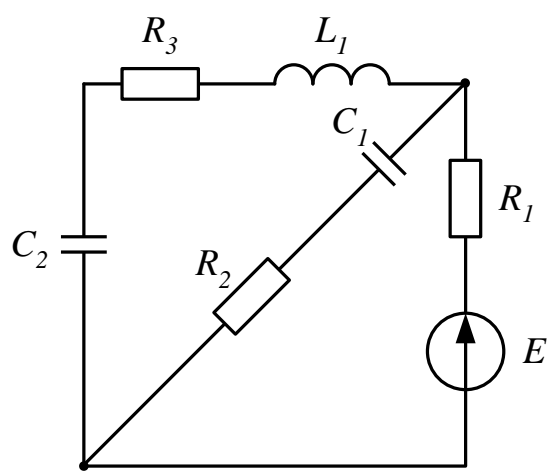


Рисунок 3.40

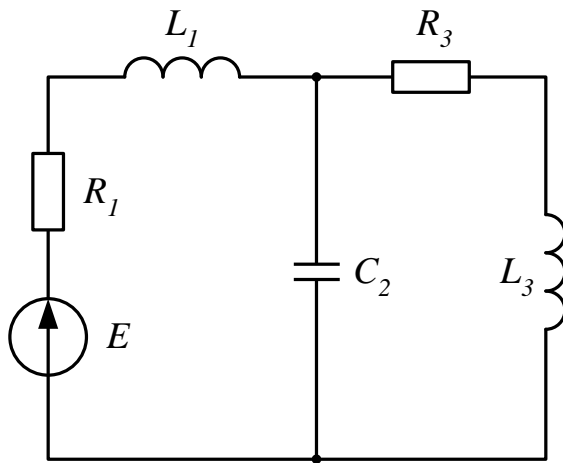


Рисунок 3.41

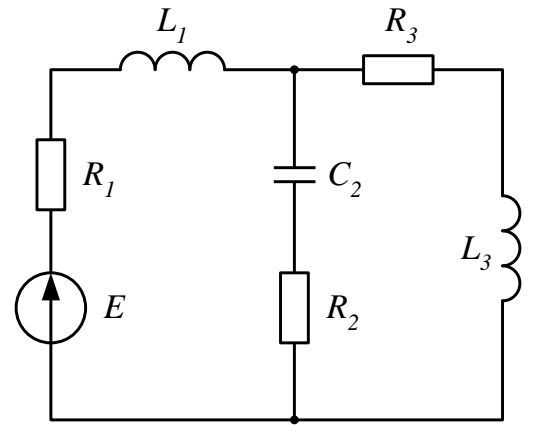


Рисунок 3.42

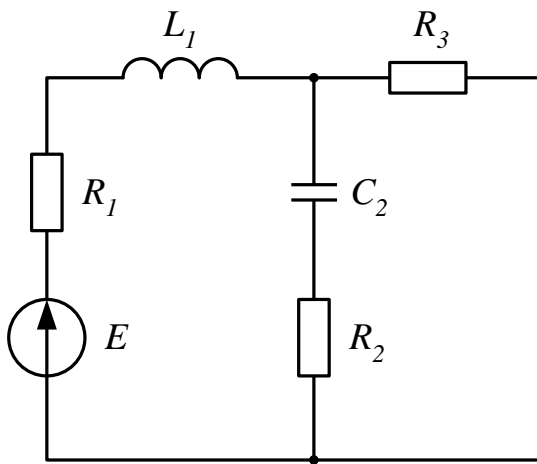


Рисунок 3.43

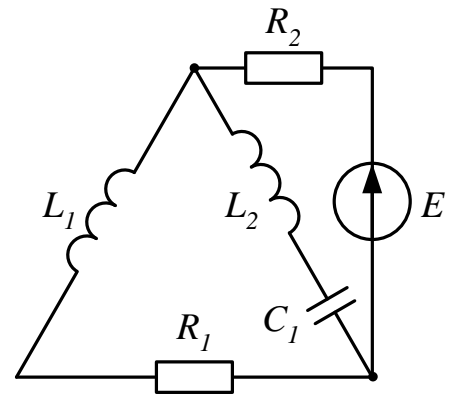


Рисунок 3.44

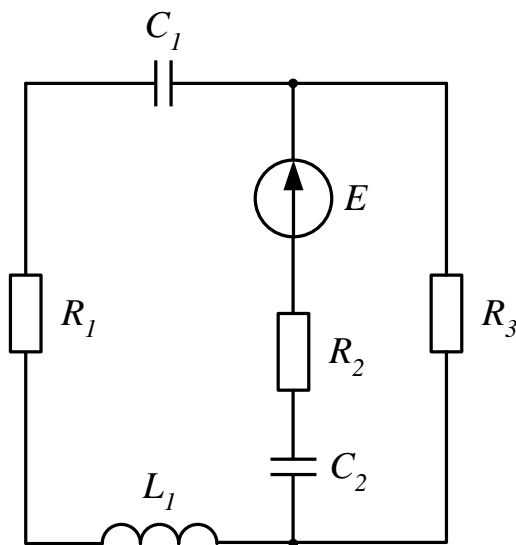


Рисунок 3.45

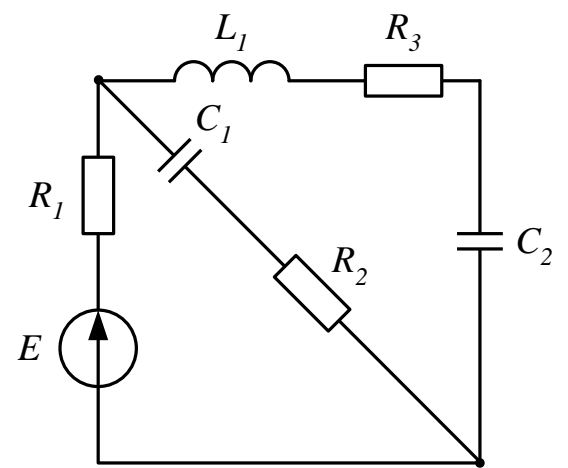


Рисунок 3.46

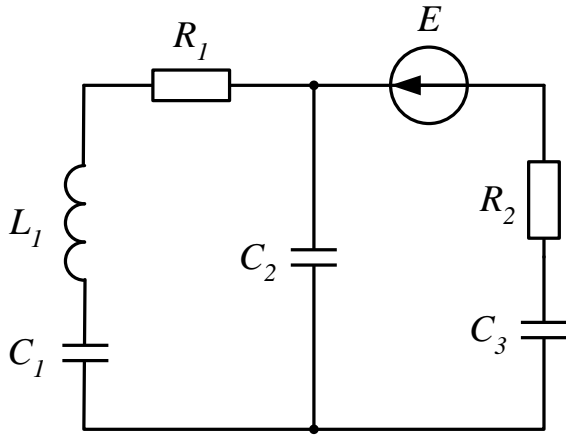


Рисунок 3.47

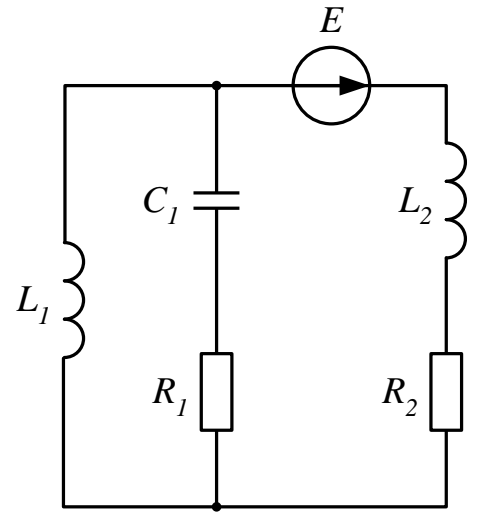


Рисунок 3.48

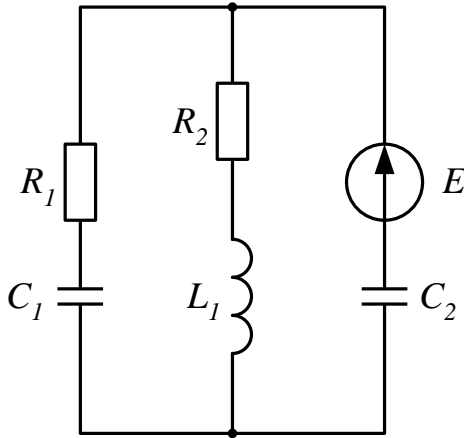


Рисунок 3.49

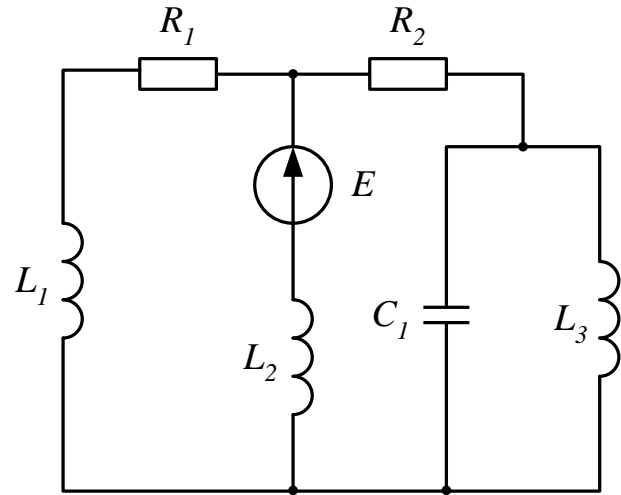


Рисунок 3.50

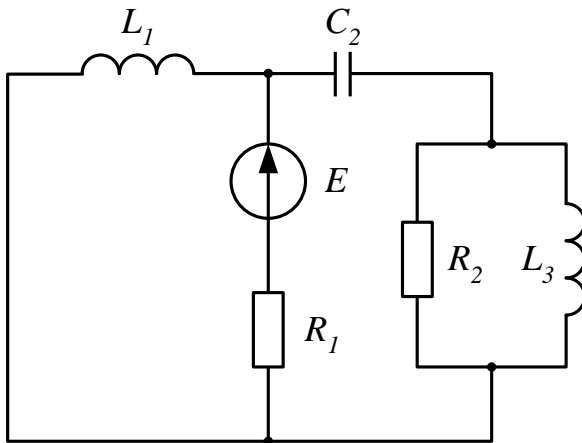


Рисунок 3.51

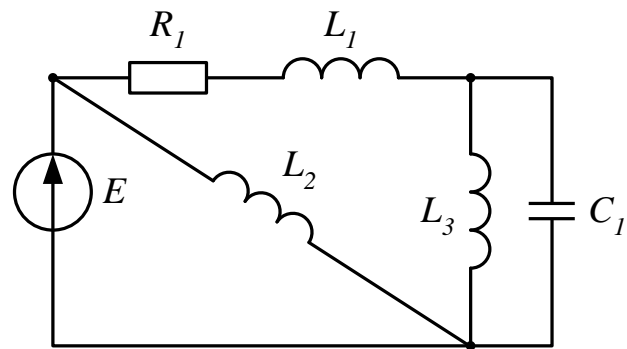


Рисунок 3.52

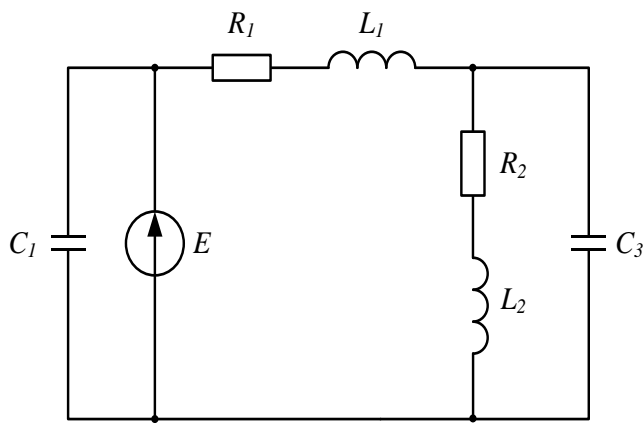


Рисунок 3.53

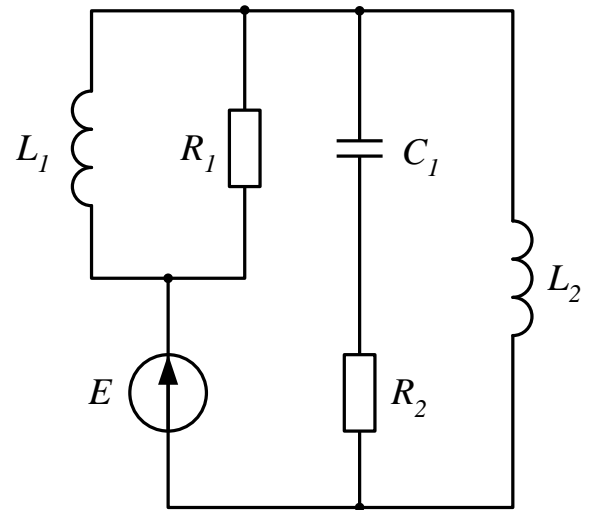


Рисунок 3.54

3.8 Контрольные вопросы

- 1 Однофазный синусоидальный ток, получение однофазного тока, Период, частота, угловая скорость (определение, обозначение, аналитическая связь между ними). Основные соображения, по которым принят в промышленности переменный ток, изменяющийся по синусоидальной кривой. Стандартная частота промышленного тока и причины, по которым она выбрана.
- 2 Мгновенное значение переменного тока (определение, обозначение, аналитические выражения и соответствующие графики). Амплитудное значение переменного тока (определение и обозначение).
- 3 Действующее значение переменного тока любой формы кривой и синусоидальной (определение, вывод формул).
- 4 Среднее значение переменного тока любой формы кривой и синусоидальной (определение, вывод формул). Коэффициент формы кривой (определение, вывод численной величины его для синусоидального тока, практическое значение).
- 5 Рассмотреть активный элемент цепи (дать определение ему, вывести аналитическое выражение для U_a при токе $i=I_m \sin \omega t$, показать их на графике, начертить векторную диаграмму).
- 6 Рассмотреть индуктивный элемент (дать определение ему, вывести формулу для u_i при токе $i=I_m \sin \omega t$, показать их на графике, начертить векторную диаграмму).
- 7 Рассмотреть емкостный элемент цепи (дать определение ему, вывести формулу для u_i при токе $i=I_m \sin \omega t$, показать их на графике, начертить векторную диаграмму).
- 8 Вывести формулу закон Ома для цепи переменного тока и раскрыть физическую сущность его, сопоставляя с формулой закона Ома для цепи постоянного тока.

- 9 Рассмотреть выражения ωL и $\frac{1}{\omega C}$; объяснить физическую сущность их и зависимость от частоты f . Постоянный ток, как частный случай переменного.
- 10 Треугольники напряжений, сопротивлений, токов и проводимостей (получение треугольников, вывод аналитических выражений для комплекса полного напряжения, сопротивления, тока, проводимости в алгебраической, тригонометрической и показательной формах).
- 11 Средняя активная мощность (определение, вывод формулы). Коэффициент мощности (аналитическое выражение, определение; физическая сущность). Влияние коэффициента мощности на экономичность электропередачи.
- 12 Треугольники мощностей (получение треугольника, понятие об активной, реактивной и полной мощностях, единицы измерения их). Комплекс полной мощности в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Определение комплекса полной мощности через ток и напряжение. Комплекс полной мощности выраженной через ток и сопротивление.
- 13 Резонанс. Понятие о колебательной системе, собственной частоте колебаний в резонансах. Рассмотреть резонанс напряжений (схема, частотные характеристики, чем характерен, практическое значение).
- 14 Резонанс токов (в какой цепи возникает, при каких условиях, чем характерен, схема, частотные характеристики, практическое значение).